Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

1. og 4. oktober 2013

Bevis for Continuity lemma (Theorem 11.4)

Gennemgås af Michael Staal-Olsen.

Bevis for Lemma 10.8

Denne har vi faktisk allerede vist; se Opgave 9.5 fra Uge 4. Det er dog vigtigt her, at man bemærker hvad lemmaet egentlig er: definitionen på tæthedsfunktioner.

Supplerende opgave 1

Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(i)

Afgør hvilke af følgende funktioner tilhører $\mathcal{L}^1(\lambda)$ (du skal begrunde dit svar):

$$u(t) = \frac{\sin(t)}{1+t^2}, \quad v(t) = \frac{\cos(t)}{1+|t|}, \quad w(t) = e^{-t^2}, \quad z(t) = e^{-t}.$$

Bemærk først, at $|u|$, $|v|$, $|w|$ og $|z|$ er kontinuerte og dermed Riemann-integrable på alle afsluttede og begrænsede intervaller; endvidere er de også målelige ikke-negative funktioner. Vi kan også nøjes med at finde fx

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |u(t)| \,\mathrm{d}t = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-n}^{n} |u(t)| \,\mathrm{d}t,$$

altså bestemme en grænse for en følge af Riemann-integraler. Årsagen er, at $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $u_n = 1_{[-n,n]}|u|$ er en voksende følge af ikke-negative målelige funktioner, med supremum og grænseværdi lig $|u|$, således at vi ved Beppo-Levis sætning (9.6) blot skal finde supremum (eller grænseværdien for) $\int 1_{[-n,n]}|u| \,\mathrm{d}\lambda$, som jf. Theorem 11.8 er lig det tilsvarende Riemann-integral (som vi nemt kan finde).

Lad os begynde med u. Idet $|u(t)| \le \frac{1}{1+t^2}$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og

$$\int_{-n}^{n} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \arctan(n) - \arctan(-n) = 2\arctan(n),$$

har vi dermed

$$\int_{-n}^{n} |u(t)| \,\mathrm{d}t = \int 1_{[-n,n]}|u| \,\mathrm{d}\lambda \le \int 1_{[-n,n]} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = 2\arctan(n)$$

jf. Properties 9.8 og Theorem 11.8. Idet $\arctan(n)$ er begrænset opadtil af $\frac{\pi}{2}$, har vi dermed, at

$$\int |u| \,\mathrm{d}\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-n}^{n} |u(t)| \,\mathrm{d}t \le \pi,$$

hvormed $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ jf. Theorem 10.3.

Funktionen v er straks lidt sværere. Bemærk først, at $|\cos(t)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2}$ for alle $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ og $t \in [\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$. Ved 2π-periodicitet af $\cos(t)$ fås derfor, at

$$|\cos(t)| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{for } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4n-1}{4}\pi, \frac{4n+1}{4}\pi\right].$$

Alle ovenstående åbne intervaller er Borel-mængder og indbyrdes disjunkte. Kaldes foreningen for A, har vi, at $1_A \leq 1$ samt at $1_A = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}$, hvor $A_n = [\frac{4n-1}{4}\pi, \frac{4n+1}{4}\pi]$. Dermed følger af Corollary 9.9, at

$$\int |v| \,\mathrm{d}\lambda \geq \int 1_A |v| \,\mathrm{d}\lambda = \int \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} |v| \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{A_n} |v| \,\mathrm{d}\lambda.$$

Lad os derfor lege med $\int 1_{A_n} |v| \,\mathrm{d}\lambda$ først. Idet vi har for $x \in A_n$, at $|v(t)| \geq \frac{1}{2(1+|t|)} = \frac{1}{2(1+t)}$, følger af Properties 9.8, at

$$\int 1_{A_n} |v| \,\mathrm{d}\lambda \geq \int 1_{A_n}(t) \frac{1}{2(1+t)} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{4n-1}{4}\pi}^{\frac{4n+1}{4}\pi} \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t,$$

idet $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ er Riemann-integrabel på ethvert afsluttet og begrænset interval grundet kontinuitet. Vi har da, at

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{4n-1}{4}\pi}^{\frac{4n+1}{4}\pi} \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t &= \log\left(1 + \frac{4n+1}{4}\pi\right) - \log\left(1 + \frac{4n-1}{4}\pi\right) = \log\left(\frac{1 + \frac{4n+1}{4}\pi}{1 + \frac{4n-1}{4}\pi}\right) \\
&= \log\left(\frac{\frac{4}{\pi} + (4n+1)}{\frac{4}{\pi} + (4n-1)}\right) \overset{\star}{=} \log\left(1 + \frac{2}{\frac{4}{\pi} + (4n-1)}\right) \\
&\overset{\dagger}{\geq} \log\left(1 + \frac{2}{4n+2}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ved $\star$ skriver vi $\frac{4}{\pi} + (4n+1)$ som $\frac{4}{\pi} + (4n-1) + 2$; ved $\dagger$ benytter vi, at $\frac{4}{\pi} - 1 \leq 2$. Derfor vil

$$\sum_{n=1}^{N} \int 1_{A_n} |v| \,\mathrm{d}\lambda \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \int_{\frac{4n-1}{4}\pi}^{\frac{4n+1}{4}\pi} \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right).$$

Kan vi vise, at det sidste udtryk ovenfor går imod ∞ for $N \to \infty$, vil vi kunne slutte, at v ikke er integrabel og derfor ikke ligger i $\mathcal{L}^1(\lambda)$. Sæt $a_n = \frac{1}{2n+1}$ for $n \in \mathbb{N}$. Antag, at $\sum_{n=1}^{N} \log(1 + a_n)$ konvergerer imod $a \in \mathbb{R}$ for $N \to \infty$. Da denne følge er voksende, vil også følge, at følgen har supremum lig a (se Kalkulus, kapitel 4). Da ville $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq (1 + a_1) \cdots (1 + a_N)$, hvormed

$$\log\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) \leq \log\left((1 + a_1) \cdots (1 + a_N)\right) = \sum_{n=1}^{N} \log(1 + a_n) \leq a,$$

så $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq e^a$ for vilkårligt N. Imidlertid ved vi, at følgen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, hvormed vi har en modstrid og dermed det ønskede.

For w's vedkommende har vi, at

$$\int_{-n}^{n} |w(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{-n}^{n} e^{-t} \,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_{-n}^{n} = e^n - e^{-n} \to \infty,$$

hvormed $\int |w| \,\mathrm{d}\lambda = \infty$, således at $w \notin \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Vi har til sidst z at kigge på. Sidst har vi, at $z^2 \geq 0$ for $0 \leq z \leq 1$, således at $e^{-z^2} \leq e^0 = 1$ for

$0 \leq z \leq 1$, samt at $z^2 \geq z$ for $z \geq 1$, hvormed $e^{-z^2} \leq e^{-z}$ for $z \geq 1$. Altså vil

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{n} |z(t)| \,\mathrm{d}t &= \int_{-n}^{0} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{n} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \overset{\star}{=} 2\int_{0}^{n} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \\
&\leq 2\left(\int_{0}^{1} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{n} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t\right) \\
&\leq 2\left(\int_{0}^{1} 1 \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{n} e^{-t} \,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\left(1 + e^{-1} - e^{-n}\right) \leq 2 + 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Vi benytter substitution ved $\star$, samt at integranden er en lige funktion. Da dette gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, vil $\int |z| \,\mathrm{d}\lambda \leq 2 + 2e^{-1}$, hvormed $z \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

(ii)

Lad $s > 0$ og lad $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved givet ved

$$u(x) = \begin{cases} 1/x^s, & \text{hvis } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis, at $u \in \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ for alle $s > 0$. For hvilke $s > 0$ gælder det, at $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$?

Betragt følgende lemma først:

Lemma 1. *Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben og lad $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ være kontinuert. Udvidelsen $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ givet ved*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{hvis } x \in A, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

er $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}^k$-målelig.

Bevis. Lad $G \subseteq \mathbb{R}^k$ være åben.; det er nok at vise, at $\tilde{f}^{-1}(G)$ er en Borel-mængde for at konklude målelighed. Da vil $\tilde{f}^{-1}(G) \cap A = f^{-1}(G) \cap A$ være åben i $\mathbb{R}^n$ grundet kontinuitet. Hvis $0 \notin G$, findes intet $x \in \tilde{f}^{-1}(G)$, således at $x \in A^c$, thi vi da ville have $G \ni \tilde{f}(x) = 0$, en modstrid. Hvis $0 \in G$, vil der for alle $x \in A^c$ gælde, at $\tilde{f}(x) = 0 \in G$, hvormed $x \in \tilde{f}^{-1}(G)$, således at $x \in \tilde{f}^{-1}(G) \cap A^c$. Omvendt gælder altid den modsatte inklusion, således at

$$\tilde{f}^{-1}(G) \cap A^c = \begin{cases} \emptyset, & \text{hvis } 0 \notin G, \\ A^c, & \text{hvis } 0 \in G, \end{cases}$$

som dermed altid er afsluttet uanset G. Altså er

$$\tilde{f}^{-1}(G) = (\tilde{f}^{-1}(G) \cap A) \cup (\tilde{f}^{-1}(G) \cap A^c)$$

altid en forening af en åben mængde og en afsluttet mængde, som dermed er Borel. $\square$

Lad $s > 0$ og definér $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ ved $g(s) = 1/x^s$. Da er g kontinuert. Dermed er udvidelsen $\tilde{g}$, givet ved $g(s)$ for $s \in (0,1)$ og 0 ellers, $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelig. Ved at lægge den $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelige funktion $1_1(x)$ til, fås netop u, så u er også målelig jf. Corollary 8.9. Da $u(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, vil dermed gælde, at $u \in \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Vi har først og fremmest

$$\int u \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int 1_{[\frac{1}{n},1]} u \,\mathrm{d}\lambda$$

jf. Beppo-Levis sætning (Theorem 9.6) (supremum er lig grænseværdien for voksende følger). Da u på disse afsluttede og begrænsede intervaller er kontinuert, er u Riemann-integrabel, så jf. Theorem 11.8 vil

$$\begin{aligned}
\int 1_{[\frac{1}{n},1]} u \,\mathrm{d}\lambda = \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}x &= \begin{cases} \log(1) - \log(\frac{1}{n}), & \text{hvis } s = 1 \\ \frac{1}{1-s} 1^{1-s} - \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-s}, & \text{ellers} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \log(n), & \text{hvis } s = 1 \\ \frac{1}{1-s}(1 - n^{s-1}), & \text{ellers} \end{cases}
\end{aligned}$$

Hvis $s = 1$, vil integralerne altså gå imod ∞; hvis $s > 1$, vil $\frac{1}{1-s} < 0$ og $s-1 > 0$, således at $n^{s-1} \to \infty$ og $1 - n^{s-1} \to -\infty$ for $n \to \infty$. Altså vil integralerne også gå imod ∞ for $s > 1$. Slutteligt har vi for $0 < s < 1$, at $n^{s-1} \to 0$ for $n \to \infty$, således at integralerne har grænseværdien $\frac{1}{1-s}$ for $n \to \infty$. Altså har vi, at $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ hvis og kun hvis $0 < s < 1$.

(iii)

Lad $s > 0$ og lad $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved givet ved

$$v(x) = \begin{cases} 1/x^s, & \text{hvis } x \geq 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis, at $v \in \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ for alle $s > 0$. For hvilke $s > 0$ gælder det, at $v \in \mathcal{L}^1(\lambda)$?

Definér $g(s) = \frac{1}{x^s}$ for $x > 1$. Da er g defineret på en åben mængde og er kontinuert, så

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 1/x^s, & \text{hvis } x > 1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

er $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelig. Lægges $1_{\{1\}}(x)$ til, fås v, således at v selv er $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-målelig. Da $v(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, vil $v \in \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

På samme måde som før har vi, at

$$\int v \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int 1_{[1,n]} v \,\mathrm{d}\lambda.$$

Samme argumentation som i (ii) giver, at

$$\begin{aligned} \int 1_{[1,n]} u \,\mathrm{d}\lambda = \int_1^n \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}x &= \begin{cases} \log(n) - \log(1), & \text{hvis } s = 1 \\ \frac{1}{1-s} n^{1-s} - \frac{1}{1-s}, & \text{ellers} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log(n), & \text{hvis } s = 1 \\ \frac{1}{1-s}(n^{1-s} - 1), & \text{ellers.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vi ser, at integralerne kun går imod noget endeligt hvis $s > 1$, så $v \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ hvis og kun hvis $s > 1$.

Supplerende opgave 2

Betragt målrummet $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, hvor μ er tællemålet. Lad $s > 0$ og betragt funktionen $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ givet ved $u(j) = 1/j^s$. For hvilke $s > 0$ gælder det, at $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$?

Vi har naturligvis, at u er positiv og målelig, hvormed vi har jf. Examples 9.10 (ii), idet $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j$, at

$$\int |u| \,\mathrm{d}\mu = \int u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} u(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s},$$

som vi ved konvergerer hvis og kun hvis $s > 1$ fra Analyse 1.

Supplerende opgave 3

(i)

Bestem grænsen

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2 + 7n}{n}\right) e^{-|x|} \,\mathrm{d}x.$$

Vi vil benytte Lebesgue's Dominated Convergence Theorem (Theorem 11.2, fremover forkortet DCT.) Definér

$$u_n(x) = \cos\left(\frac{x^2 + 7n}{n}\right) e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

for alle $n \in \mathbb{N}$; da er u_n kontinuert og dermed målelig for alle $n \in \mathbb{N}$. Bemærk nu, at $|u_n(x)| \leq e^{-|x|}$. Funktionen $x \mapsto e^{-|x|}$ er kontinuert, og dermed Riemann-integrabel på alle afsluttede, begrænsede intervaller; tilmed gælder, at

$$\int_{-n}^{n} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-n}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{n} e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^0 - e^{-n} - e^{-n} + e^0 = 2 - 2e^{-n}.$$

Dermed vil

$$\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (2 - 2e^{-n}) = 2.$$

Altså er $x \mapsto e^{-|x|}$ indeholdt i $\mathcal{L}^1(\lambda)$. Af Theorem 10.3 følger nu, at alle u_n er indeholdt i $\mathcal{L}^1(\lambda)$. Bemærk, at

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \cos\left(\lim n \to \infty \left(\frac{x^2 + 7n}{n}\right)\right) e^{-|x|} = \cos(7)e^{-|x|}.$$

Af DCT følger nu, at $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, samt at

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2+7n}{n}\right) e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int u_n\,\mathrm{d}\lambda \to \int u\,\mathrm{d}\lambda &= \int \cos(7)e^{-|x|}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \cos(7)\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= 2\cos(7)\end{aligned}$$

jf. Theorem 10.4.

(ii)

Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definér $u_n(x) = 1_{[0,2\pi]}(x)\sin(x)^n$. Da er u_n et produkt af målelige funktioner (deriblandt en kontinuert) og dermed selv målelig (jf. Corollary 8.10). Bemærk, at $|u_n(x)| \leq 1_{[0,2\pi]}(x)1^n = 1_{[0,2\pi]}(x)$. Idet $1_{[0,2\pi]}$ er ikke-negativ og målelig, samt

$$\int 1_{[0,2\pi]}\,\mathrm{d}\lambda = \lambda([0,2\pi]) = 2\pi,$$

følger at alle $u_n \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved Theorem 10.3. Bemærk, at $|\sin(x)^n| = |\sin(x)|^n \to 0$ for $x \in [0,2\pi]$ med $|\sin(x)| < 1$, dvs. for $x \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. For $x \notin [0,2\pi]$ vil $u_n(x) = 0$, således at

$$u_n(x) = \sin(x)^n \to \begin{cases} 1, & \text{hvis } x = \frac{\pi}{2} \\ \text{ingenting}, & \text{hvis } x = \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hvis vi altså definerer $u(x) = 1_{\{\frac{\pi}{2}\}}(x)$ for $x \in \mathbb{R}$, vil $u_n(x) \to u(x)$ λ-næsten overalt, og DCT giver os nu, at

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x = \int u_n\,\mathrm{d}\lambda \to \int u\,\mathrm{d}\lambda = \lambda(\{\tfrac{\pi}{2}\}) = 0,$$

som ønsket, idet vi benytter Theorem 11.8 til den første lighed.

(Supplerende opgave 4)

I denne opgave har vi brug for at integrere komplekse funktioner. Dette emne vil blive taget op i Kapitel 20. Indtil da benytter vi, at integralet af en kompleks funktion kan bestemmes ved at inddele den i real- og imaginærdelen. Stort set alle resultater i Kapitel 11 om integralet af reelle funktioner kan overføres til integralet af komplekse funktioner.

Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, lad $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, og betragt funktionen

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vis, at v er veldefineret og kontinuert. Sæt $u_1(x) = -ixu(x)$, og antag at $u_1 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Vis, at v er differentiabel, og at

$$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u_1(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x.$$

(Funktionen v kaldes *Fourier-transformationen* af funktionen u.)

Bemærk først, at hvis betingelserne i Theorem 11.4 (Continuity lemma) er opfyldt, vil v være veldefineret og kontinuert (se beviset!). Definér $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(x) e^{-ixt}$. For fast $t \in \mathbb{R}$, vil

$$|g(t,x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |u(x)| \le |u(x)|$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. idet $|e^{-ixt}| = 1$. Da $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, vil $x \mapsto g(t,x)$ tilhøre $\mathcal{L}^1(\lambda)$ jf. Theorem 10.3, så (a) er opfyldt. Holdes $x \in \mathbb{R}$ fast, er $t \mapsto g(t,x)$ klart kontinuert, idet $u(x)$ blot er et tal, så (b) er opfyldt, og (c) har vi allerede vist, idet $|g(t,x)| \le |u(x)|$ for alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ og vi ved, at $|u| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, idet $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ jf. Theorem 10.3. Dermed er

$$v(t) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x$$

veldefineret og kontinuert på hele $\mathbb{R}$.

Vi går nu i gang med at tjekke betingelserne i Theorem 11.5 (Differentiability lemma). Vi lader g være defineret som før. (a) har vi allerede vist, og for fast $x \in \mathbb{R}$ er $t \mapsto g(x,t)$ differentiabel på $\mathbb{R}$ med afledt

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(x)(-ixe^{-ixt}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_1(x) e^{-ixt}.$$

Slutteligt gælder for alle $(t,x) \in \mathbb{R}$, at

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |u_1(x)| \le |u_1(x)|.$$

Pr. antagelse gælder $u_1 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, så $|u_1| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ jf. Theorem 10.3, hvormed betingelse (c) er opfyldt. Altså er v differentiabel med differentialkvotient

$$v'(t) = \int \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_1(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u_1(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x,$$

som ønsket.

Supplerende opgave 5

Lad $(X, \mathcal{A})$ være et målbart rum, og lad $\mu_1, \ldots, \mu_k$ være mål på $(X, \mathcal{A})$. Sæt $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$. Gør rede for, at μ er et mål på $(X, \mathcal{A})$, vis at

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu_1) \cap \cdots \cap \mathcal{L}^1(\mu_k),$$

og vis at

$$\int u \, \mathrm{d}\mu = \int u \, \mathrm{d}\mu_1 + \cdots + \int u \, \mathrm{d}\mu_k$$

for alle $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Vi viste i Supplerende opgave 3.5 fra Uge 4, at μ var et mål (ellers er det også indholdet af Opgave 4.6 fra Uge 2). En funktion $u\colon X \to \mathbb{R}$ er $\mathcal{A}/\bar{\mathcal{B}}$-målelig hvis og kun hvis u^+ og u^- er, jf. Corollary 8.11. Antag derfor, at $u\colon X \to \mathbb{R}$ er $\mathcal{A}/\bar{\mathcal{B}}$-målelig. Både u^+ og u^- er derfor målelige og ikke-negative funktioner, og jf. Supplerende opgave 3.5 gælder derfor

$$\int \mu^{\pm} \, \mathrm{d}\mu = \int u^{\pm} \, \mathrm{d}\mu_1 + \cdots + \int u^{\pm} \, \mathrm{d}\mu_k \ge \int u^{\pm} \, \mathrm{d}\mu_j \tag{1}$$

for alle $j = 1, \ldots, k$.

Hvis $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$, vil $u^+, u^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ jf. Theorem 10.3, hvormed $\int u^\pm \,\mathrm{d}\mu_j \leq \int \mu^\pm \,\mathrm{d}\mu < \infty$ for alle $j = 1, \ldots, k$. Altså vil $u^+, u^- \in \mathcal{L}^1(\mu_j)$ for alle $j = 1, \ldots, k$, så med Theorem 10.3 sluttes, at $u \in \mathcal{L}^1(j)$ for disse j. Hvis omvendt $u \in \mathcal{L}^1(\mu_j)$ for alle $j = 1, \ldots, k$, vil gælde, at $u^+, u^- \in \mathcal{L}^1(\mu_j)$ for alle j. Altså er summen i (1) altid endelig (dvs. $< \infty$), hvormed $\int \mu^\pm \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Vi slutter, at $u^+, u^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$, hvormed $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Altså er mængdeligheden vist.

Slutteligt gælder, at for $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$, vil $u \in \mathcal{L}^1(\mu_j)$ for alle $j = 1, \ldots, k$. Da vil

$$\begin{aligned}
\int u \,\mathrm{d}\mu &= \int u^+ \,\mathrm{d}\mu - \int u^- \,\mathrm{d}\mu \\
&= \left(\sum_{j=1}^k \int u^+ \,\mathrm{d}\mu_j \right) - \left(\sum_{j=1}^k \int u^- \,\mathrm{d}\mu_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \left(\int u^+ \,\mathrm{d}\mu_j - \int u^- \,\mathrm{d}\mu_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \int u \,\mathrm{d}\mu_j,
\end{aligned}$$

som ønsket.

(Supplerende opgave 6)

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrum, og lad $u\colon X \to \mathbb{R}^+$ være en målelig funktion.

(i)

Vis, at funktionen $t \mapsto \mu\left(u^{-1}((t, \infty))\right)$ er aftagende.

Bemærk, at ovenstående udtryk altid giver mening, idet u er målelig og (t, ∞) er en Borel-mængde for ethvert $t \in \mathbb{R}$. Vi behøver kun at tjekke, at funktionen er aftagende over de positive tal, idet $u^{-1}((t, \infty)) = X$ for alle $t < 0$. (Vi får så den konstante værdi $\mu(X)$ for $t < 0$, som er større end alle værdier funktionen antager for $t \geq 0$.) For $0 \leq t_1 < t_2$ vil $(t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$, hvormed $u^{-1}((t_1, \infty)) \supseteq u^{-1}((t_2, \infty))$ (fordi urbilleder er nice). Grundet monotoni for mål (Proposition 4.3 (ii)) fås nu, at

$$\mu\left(u^{-1}((t_1, \infty))\right) \geq \mu\left(u^{-1}((t_2, \infty))\right),$$

så funktionen er aftagende.

(ii)

Vis, at

$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu\left(u^{-1}((t, \infty))\right) \,\mathrm{d}t.$$

Lad os antage først, at $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ er en simpel funktion. Vi kan dermed finde en standardrepræsentation

$$f = \sum_{j=1}^n y_j 1_{A_j}, \tag{2}$$

hvor A_j'erne er disjunkte målelige mængder i A og y_j'erne er ikke-negative tal. Vi kan antage, at $y_j > 0$ for alle j, thi hvis et af dem var lig 0, kunne vi blot fjerne det tilsvarende led fra ovenstående sum uden at ændre på ligheden. Endvidere kan vi antage, at $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ (ellers kan vi slå A_j'er sammen til nye målelige mængder). For $t \geq y_n$ vil

$$0 \leq \mu\left(f^{-1}((t, \infty))\right) \geq \mu\left(f^{-1}((y_n, \infty))\right)$$

grundet (i). Idet den største værdi f kan antage er y_n, vil $f^{-1}((y_n, \infty))$ være den tomme mængde, således at $\mu\left(f^{-1}((t, \infty))\right) = 0$ for alle $t \geq y_n$. Altså vil

$$\int_0^\infty \mu(f^{-1}(t, \infty)) \,\mathrm{d}t = \int 1_{[0,\infty)}(t) \mu(f^{-1}(t, \infty)) \,\mathrm{d}t = \int 1_{[0,y_n)}(t) \mu(f^{-1}(t, \infty)) \,\mathrm{d}t.$$

Sæt $y_0 = 0$. Vi påstår nu, at for $y_{j-1} \leq t < y_j$ vil

$$f^{-1}((t,\infty)) = A_j \cup \cdots \cup A_n$$

for alle $j = 1, \ldots, n$. Lad nemlig et sådant j være givet og lad $y_{j-1} \leq t < y_j$. Hvis $x \in f^{-1}((t,\infty))$, vil $f(x) > t \geq y_{j-1}$. Specielt vil $f(x) > 0$, så der må nødvendigvis gælde, at $x \in A_k$ for et $k = 1, \ldots, n$. (Hvis ikke, vil $f(x) = 0$ jf. forskriften (2) på f.) Dette k kan ikke opfylde $k \leq j-1$, thi vi så ville have $f(x) = y_k \leq y_{j-1}$, en modstrid. Altså må $k \in \{j, \ldots, n\}$, så $x \in A_j \cup \cdots \cup A_n$. Hvis omvendt $x \in A_k$ for et $k = j, \ldots, n$, vil $f(x) = y_k \geq y_j > t$, hvormed $x \in f^{-1}((t,\infty))$. Vi kan nu skrive

$$\begin{aligned}
1_{[0,y_n)}(t)\mu(f^{-1}((t,\infty))) &= \sum_{j=1}^n 1_{[y_{j-1},y_j)}(t)\mu(f^{-1}(t,\infty)) = \sum_{j=1}^n 1_{[y_{j-1},y_j)}(t)\mu(A_j \cup \cdots \cup A_n) \\
&= \sum_{j=1}^n 1_{[y_{j-1},y_j)}(t) \sum_{k=j}^n \mu(A_k),
\end{aligned}$$

da A_k'erne er disjunkte. Bemærk, at dette giver noget andet virkelig godt: hvis f er en simpel funktion, er $t \mapsto 1_{[0,y_n)}(t)\mu(f^{-1}((t,\infty)))$ også en **simpel funktion**! Dette vil blive nyttigt, når vi generaliserer. Nu vil

$$\begin{aligned}
\int 1_{[0,y_n)}(t)\mu(f^{-1}(t,\infty))\,\mathrm{d}t &= \int \sum_{j=1}^n 1_{[y_{j-1},y_j)}(t) \sum_{k=j}^n \mu(A_k)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \int 1_{[y_{j-1},y_j)}(t)\mu(A_k)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^n (y_j - y_{j-1}) \left(\sum_{k=j}^n \mu(A_k) \right) \\
&= (y_1 - y_0) \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + (y_2 - y_1) \sum_{k=2}^n \mu(A_k) + \cdots \\
&\qquad + (y_{n-1} - y_{n-2}) \sum_{k=n-1}^n \mu(A_k) + (y_n - y_{n-1})\mu(A_n) \\
&\stackrel{?}{=} \mu(A_1)(y_1 - y_0) + \mu(A_2)(y_2 - y_0) + \cdots + \mu(A_n)(y_n - y_0) \\
&= y_1\mu(A_1) + \cdots + y_n\mu(A_n) = \sum_{j=1}^n y_j \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Ved spørgsmålstegnet er der følgende forklaring: vi samler simpelthen led efter hvert $\mu(A_k)$. Fx forekommer $\mu(A_1)$ kun i den første sum, så $\mu(A_1)$ får koefficient $y_1 - y_0$; $\mu(A_2)$ forekommer kun i de to første, så denne får koefficient $(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = y_2 - y_0$ osv., op til $\mu(A_n)$. Ethvert led har desuden $\mu(A_k)$ som faktor, så vi mangler ikke noget efter at have samlet koefficienter på denne måde. Idet

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \int \sum_{j=1}^n y_j 1_{A_j}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n y_j \mu(A_j)$$

jf. Properties 9.8, følger, at den ønskede lighed gælder for simple funktioner $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$.

Tilbage til u. Der findes jf. Theorem 8.8 en voksende følge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ af simple og ikke-negative funktioner som konvergerer imod u. Da vil jf. Corollary 9.7 gælde, at

$$\int u\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int u_j\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_0^\infty \mu\left(u_j^{-1}((t,\infty))\right)\,\mathrm{d}t.$$

Vi fandt før, at $t \mapsto 1_{[0,\infty)}(t)\mu\left(u_j^{-1}((t,\infty))\right)$ var en simpel funktion. Betegn denne med f_j. Lad $t \in \mathbb{R}$ være fast. For $j < k$ vil $u_j(x) \leq u_k(x)$, da følgen (u_j) var voksende. Vi har altså, at $x \in u_j^{-1}((t,\infty))$ medfører $u_k(x) \geq u_j(x) > t$, så $u_j^{-1}((t,\infty)) \subseteq u_k^{-1}((t,\infty))$. Monotoni af mål giver nu, at $f_j(x) \leq$

$f_k(x)$. Da følgen af mængder $(u_j^{-1}((t,\infty)))_{j\in\mathbb{N}}$ er voksende, gælder jf. Theorem 4.4, at

$$\lim_{j\to\infty}\mu(u_j^{-1}((t,\infty))) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} u_j^{-1}((t,\infty))\right).$$

Vi viser nu, at

$$u^{-1}((t,\infty)) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} u_j^{-1}((t,\infty)).$$

Hvis $u(x) > t$ for et $x \in X$, kan vi lade $\varepsilon = u(x) - t$. Idet $u_j(x) \to u(x)$ for $j \to \infty$, findes $N \in \mathbb{N}$ så $j \geq N$ medfører $|u_j(x) - u(x)| < t$. Dermed vil $u(x) - u_N(x) < u(x) - t$ og derfor $u_N(x) > t$, så der findes $N \in \mathbb{N}$ så $x \in u_N^{-1}((t,\infty))$. Hvis der omvendt findes $j \in \mathbb{N}$ så $x \in u_j^{-1}((t,\infty))$ eller $u_j(x) > t$, vil $u(x) \geq u_j(x) > t$, så $x \in u^{-1}((t,\infty))$. Altså slutter vi ligheden, og dermed vil

$$\lim_{j\to\infty}\mu\left(u_j^{-1}((t,\infty))\right) = \mu\left(u^{-1}((t,\infty))\right).$$

Derfor vil

$$f_j(t) \to 1_{[0,\infty)}(t)\mu\left(u^{-1}((t,\infty))\right)$$

for $j \to \infty$. Da $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er en voksende følge af simple funktioner med ovenstående som grænse, følger nu af Corollary 9.7, at

$$\int_0^\infty \mu\left(u^{-1}((t,\infty))\right)\,\mathrm{d}t = \int 1_{[0,\infty)}(t)\mu\left(u^{-1}((t,\infty))\right)\,\mathrm{d}t = \lim_{j\to\infty}\int f_j\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{j\to\infty}\int_0^\infty \mu\left(u_j^{-1}((t,\infty))\right)\,\mathrm{d}t.$$

Dermed vil

$$\int u\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\int_0^\infty \mu\left(u_j^{-1}((t,\infty))\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu\left(u^{-1}((t,\infty))\right)\,\mathrm{d}t,$$

som ønsket.

Supplerende opgave 7

Betragt målrummet $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Lad μ være målet på $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ givet ved $\mu = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\delta_j$.

(i)

Vis, at μ er et sandsynlighedsmål.

Vi ved allerede fra Opgave 4.6 (ii), at μ er et mål, idet δ_j er mål for alle $j \in \mathbb{N}$. Husk, at $\delta_j(A) = 1$ hvis $j \in A$ og giver 0 ellers. Idet $j \in \mathbb{N}$ for alle $j \in \mathbb{N}$ (d'oh!), vil $\delta_j(\mathbb{N}) = 1$ for alle $j \in \mathbb{N}$, hvormed

$$\mu(\mathbb{N}) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\delta_j(\mathbb{N}) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} = 1,$$

så μ er et sandsynlighedsmål.

(ii)

Bestem $\mu(E)$, hvor $E \subseteq \mathbb{N}$ er mængden af lige tal.

For lige $j \in \mathbb{N}$, vil $\delta_j(E) = 1$, og for ulige $j \in \mathbb{N}$ vil $\delta_j(E) = 0$. Altså vil

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\delta_j(E) = \sum_{j \text{ lige}} 2^{-j} = \sum_{j=1}^\infty 2^{-2j} = \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

(iii)

Vis, at $N = \emptyset$ er den eneste nulmængde.

Vi viser, at $N \neq \emptyset$ medfører $\mu(N) > 0$ for $N \subseteq \mathbb{N}$. Hvis $N \neq \emptyset$, findes $n \in \mathbb{N}$, hvormed $\mu(N) \geq \mu(\{n\}) = 2^{-n} > 0$, som ønsket.

(iv)

Lad $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ være givet ved $u(j) = (3/2)^j$. Beregn $\int u \, \mathrm{d}\mu$.

Da u er positiv og målelig (alle funktioner $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er jo), følger af Examples 9.10 (ii), at

$$\int u \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} u(j) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \left(\frac{3}{2}\right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 = 3.$$

11.6

Giv et eksempel på en følge af integrable funktioner $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ med $u_j(x) \to u(x)$ for $j \to \infty$ og alle x, og en integrabel funktion u, men så $\lim_{j\to\infty} \int u_j \, \mathrm{d}\mu \neq \int u \, \mathrm{d}\mu$. Modsiger dette DCT, Theorem 11.2?

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ og definér $u_j(x) = j 1_{(0,\frac{1}{j})}(x)$ for $x \in \mathbb{R}$. Da vil $u_j(x) \to 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Alle u_j'er er ikke-negative og målelige funktioner, med

$$\int u_j \, \mathrm{d}\lambda = j\lambda\left(\left(0, \frac{1}{j}\right)\right) = 1,$$

men $\int u \, \mathrm{d}\lambda = 0$. Dette modsiger ikke DCT, fordi der ikke findes en integrabel positiv øvre grænse w for alle $|u_j|$'er simultant (uniformt). Dette kan ses ved hjælp af en tegning; alternativt kan bemærkes at for $\frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n}$ for et $n \in \mathbb{N}$, vil

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j(x)| = u_n(x) = n.$$

Hvis w er en positiv og målelig funktion på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ med $w \ge |u_j|$ for alle j, vil specielt gælde, at $w \ge \sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j|$, således at

$$w(x) \ge \sum_{n=1}^{\infty} n 1_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x).$$

Deraf fås ved Corollary 9.9 og Properties 9.8, at

$$\int w \, \mathrm{d}\lambda \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int n 1_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})} \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

11.11

Vis, at funktionen $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$G(t) := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} \, \mathrm{d}x$$

er differentiabel og find $G(0)$ og $G'(0)$. Brug et grænseargument, partiel integration og formlen $t\frac{\partial}{\partial t}\sin(tx) = x\frac{\partial}{\partial x}\sin(tx)$ til at vise, at

$$tG'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2x\sin(tx)}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Vi får brug for nogle begrænsninger, idet integranden ellers kan opføre sig ret uterligt. Lad $N > 0$ og definér $g\colon (-N, N) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g(t,x) = \begin{cases} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

Vi bemærker for $x \neq 0$ og $t \neq 0$, at

$$\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} = t\frac{\sin(tx)}{tx}\frac{1}{1+x^2}.$$

Eftersom $\frac{\sin(u)}{u} \to 1$ for $u \to 0$, kan vi grundet kontinuitet af funktionen

$$u \mapsto h(u) = \begin{cases} \frac{\sin(u)}{u} & \text{hvis } 0 < |t| \leq 1 \\ 1 & \text{hvis } t = 0 \end{cases}$$

også konkludere, at den er begrænset på $[-1, 1]$. Der findes altså $M \geq 0$ så $|h(u)| \leq M$ for alle $u \in [-1, 1]$; for $|u| > 1$ vil

$$\left| \frac{\sin(u)}{u} \right| \leq \frac{1}{|u|} \leq 1,$$

således at funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$u \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(u)}{u} & \text{hvis } t \neq 0 \\ 1 & \text{hvis } t = 0 \end{cases}$$

er begrænset af en konstant $M' = \max\{M, 1\}$. Lad os nu se, hvad vi kan gøre med $|g(t, x)|$. Hvis enten x eller t er lig 0, fås, at $|g(t, x)| = 0$; hvis $x \in \mathbb{R}$ med $x \neq 0$ og $t \in (-N, N)$ med $t \neq 0$, vil $tx \neq 0$, så

$$|g(t, x)| = \left| t \frac{\sin(tx)}{tx} \frac{1}{1 + x^2} \right| \leq |t| \cdot M' \cdot \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{NM'}{1 + x^2}.$$

Vi fandt i Supplerende opgave 1, at $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ tilhørte $\mathcal{L}^1(\lambda)$; jf. Theorem 10.4 er sidste funktion ovenfor også indeholdt i $\mathcal{L}^1(\lambda)$, så jf. Theorem 10.3 er $x \mapsto g(t, x)$ indeholdt i $\mathcal{L}^1(\lambda)$ for ethvert fast $t \in (-N, N)$. Altså er (a) i Theorem 11.5 opfyldt.

Lad nu $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ være fast. Da er $t \mapsto g(t, x) = \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}$ differentiabel, med differentialkvotient

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\cos(tx)}{1 + x^2}.$$

Hvis $x = 0$, er $g(t, x) = 0$ for alle $t \in (-N, N)$, som også er differentiabel med $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = 0$. Altså er (b) også opfyldt. Lad til sidst $(t, x) \in (-N, N) \times \mathbb{R}$. Hvis $x \neq 0$, vil

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Da $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = 0$ hvis $x = 0$, har vi derfor klart $|\frac{\partial g}{\partial t}(t, x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ for vilkårlige (t, x). Da funktionen $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ er målelig, integrabel og ikke-negativ, følger (c). Dermed vil funktionen $G\colon (-N, N) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$G(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{\sin(tx)}{x(1 + x^2)} \,\mathrm{d}x = \int g(t, x) \,\mathrm{d}x$$

(omskrivningen er gyldig, idet $\{0\}$ er en nulmængde) differentiabel med afledet

$$G'(t) = \int \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x,$$

idet $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\cos(tx)}{1+x^2}$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$. Da N var vilkårlig, slutter vi, at G er differentiabel overalt på $\mathbb{R}$ med samme differentialkvotient.

Vi ser straks, at $G(0) = 0$, samt

$$G'(0) = \int \frac{1}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} [\arctan(x)]_{-n}^{n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Vi har, at

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} \sin(tx)}{1 + x^2} = \frac{t \cos(tx)}{1 + x^2},$$

således at

$$
\begin{aligned}
tG'(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{t\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{t\cos(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial x}\sin(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\right]_{-n}^{n} - \int_{-n}^{n} \sin(tx)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\right]_{-n}^{n} - \int_{-n}^{n} \sin(tx)\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\right]_{-n}^{n} + \int_{-n}^{n} \frac{2x\sin(tx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \right) \\
&\overset{(2)}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sin(tx)}{1+x^2}\right]_{-n}^{n}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} \frac{2x\sin(tx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

som ønsket. Ved (1) benyttes Theorem 11.2 hvor vi på integranden har ganget indikatorfunktioner $1_{[-n,n]}$; disse produkter har en integrabel majorant $\frac{|t|}{1+x^2}$, hvormed vi benytter Theorem 11.8 for at omskrive til Riemann-integraler. Ved (2) benyttes samme trick, hvor vi bemærker, at

$$
\left|\frac{2x\sin(tx)}{(1+x^2)^2}\right| \le \underbrace{\frac{2}{1+x^2}}_{\text{integrabel}} \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\text{begrænset}}.
$$

11.16

Betragt funktionerne $u = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ og $v = 1_{\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}}$. Bevis eller falsificér:

(For at kunne tale om Riemann-integraler betragter vi funktionerne restringeret til $[0,1]$.)

(i)

Funktionen u er 1 på de rationale tal og 0 ellers. Derfor er u kontinuert overalt, undtagen på mængden $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Eftersom dette er en nulmængde, er u næsten overalt kontinuert og dermed Riemann-integrabel ved Theorem 11.8.

Forkert. u er ikke kontinuert på de irrationale tal i $[0,1]$; tag fx $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$ og vælg en følge $x_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$. Da vil $u(x_n) = 1$, men $u(x) = 0$. Derfor er mængden af tal i $(0,1)$ hvor u er diskontinuert *ikke* en Lebesgue-nulmængde, så u er ikke Riemann-integrabel.

(ii)

Funktionen v er 0 overalt, undtagen på værdierne $x = 1/n$ for $n \in \mathbb{N}$. Derfor er v kontinuert overalt bortset fra på en tællelig mængde, dvs. en nulmængde, og v er næsten overalt kontinuert, og derfor Riemann-integrabel ved Theorem 11.8.

Dette er sandt. v har kun diskontinuitetspunkter $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, som stadig er tællelig og derfor har Lebesgue-mål 0. Altså er v Riemann-integrabel jf. Theorem 11.8.

(iii)

Funktionerne u og v er Lebesgue-integrable med $\int u\,\mathrm{d}\lambda = \int v\,\mathrm{d}\lambda = 0$.

Dette følger klart, da u og v er positive og målelige; integralerne er lig målet af mængderne indikatorfunktionerne tages over, og dermed begge lig 0, idet mængderne er tællelige.

(iv)

Funktionen u er ikke Riemann-integrabel.

Dette er også sandt. Hvis π er en inddeling af $[0, 1]$, har vi idet både $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ og $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ er tætte i $[0, 1]$, at infimum over et interval i inddelingen altid er 0 og at supremum over samme er lig 1. Dermed vil $\sup_\pi S_\pi[u] = 0$ og $\inf_\pi S^\pi[u] = 1$ (se notationen side 94), således at u ikke kan være Riemann-integrabel.