Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

8. og 11. oktober 2013

Supplerende opgave 1

Lad $C([a,b],\mathbb{R})$ betegne rummet af alle kontinuerte funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b],\mathbb{R})$ og $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, og antag, at $f_n \to f$. Antag videre, at der findes $M < \infty$ så $|f_n(x)| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $x \in [a,b]$. Vis, at

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (*)$$

idet integralerne er Riemann-integraler. Hvis antagelsen at $|f_n(x)| \leq M$ for alle x og n droppes, gælder $(*)$ så stadig?

Vi betragter målrummet $([a,b], \mathcal{B} \cap [a,b], \lambda)$. Bemærk først, at vi jf. Theorem 11.8 har, at alle f_n samt f er Lebesgue-integrable, idet de er kontinuerte og dermed Riemann-integrable. Definerer vi $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ved $w(x) = M$, vil $w \in \mathcal{L}^1([a,b],\lambda)$, idet

$$\int_{[a,b]} w\,\mathrm{d}\lambda = M\lambda([a,b]) = M(b-a) < \infty.$$

Idet $|f_n| \leq w$ for alle n jf. antagelsen, følger af Lebesgues DCT (Theorem 11.2) (ii), at

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f_n\,\mathrm{d}\lambda \to \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Vi betragter intervallet $[a,b] = [0,1]$, for at vise, at antagelsen at $|f_n| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er nødvendig (for at overføre modeksemplet til det generelle tilfælde, kan vi sammensætte med den kontinuerte afbildning $[a,b] \to [0,1]$ givet ved $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$). Definér nemlig for alle $n \in \mathbb{N}$ funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2n}) \\ 2n - 2n^2x & \text{for } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{for } x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Da er f_n kontinuert, og ydermere ses, at $f_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ for alle $x \in [0,1]$, idet vi for alle $x > 0$ kan finde $N \in \mathbb{N}$ så $\frac{1}{N} < x$, hvormed $n \geq N$ medfører $\frac{1}{n} < x$ og dermed $f_n(x) = 0$ (hvis $x = 0$, vil $f_n(x) = 0$ automatisk). Definerer vi $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ved $f(x) = 0$, vil $f_n \to f$ punktvist. Dog har vi, at

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = [n^2x^2]_0^{1/2n} + [2nx - n^2x^2]_{1/2n}^{1/n} = \frac{1}{4} + (2-1) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Supplerende opgave 2

Betragt funktionen $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 1_{[n,n+1)}$$

(med konventionen $(-1)^0 = 1$). Vis, at det uegentlige Riemann-integral

$$\int_0^\infty u(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{N\to\infty} \int_0^N u(x)\,\mathrm{d}x$$

eksisterer, men at $u \notin \mathcal{L}^1([0,\infty),\lambda)$.

Lad først $N \in \mathbb{N}$ og betragt $u_N\colon [0,N] \to \mathbb{R}$ givet ved $u_N(x) = u(x)$. Bemærk da, at

$$u_N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+1} 1_{[n,n+1)} + \frac{(-1)^N}{N+1} 1_{\{N\}}.$$

Vi ser heraf, at u_N kun antager værdierne $\frac{(-1)^n}{n+1}$ for $n = 0,\dots,N$, og at den antager disse på intervaller. Her er u_N altså begrænset, og mængden af diskontinuitetspunkter for u_N er endelig (den består af punkterne $\{1,\dots,N\}$), som dermed har Lebesgue-mål 0. Jf. Theorem 11.8 er u_N Riemann-integrabel og dermed Lebesgue-integrabel, og endvidere vil

$$\int_0^N u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^N u_N(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\star}{=} \int 1_{[0,N)} u \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{N-1} \int \frac{(-1)^n}{n+1} 1_{[n,n+1)}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

hvor vi benytter ved $\star$, at $\{N\}$ har Lebesgue-mål 0. Ovenstående sum konvergerer for $N \to \infty$ (dette ved vi fra Analyse 1, idet det er en alternerende række hvis led numerisk er aftagende og konvergerer imod 0), så det uegentlige Riemann-integral eksisterer. Imidlertid vil

$$|u| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} 1_{[n,n+1)},$$

hvilket let ses ved at tjekke punktvist på intervallerne $[n, n+1)$. Hvert af leddene er en målelig funktion, så jf. Corollary 9.9 har vi, at

$$\int |u|\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{1}{n+1} 1_{[n,n+1)}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

således at $u \notin \mathcal{L}^1([0,\infty),\lambda)$ jf. Theorem 10.3.

Supplerende opgave 3

Denne opgave har til formål at illustrere Theorem 11.8 (ii).

(i)

Betragt funktionen $u\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{for } 1 < x \le 2, \end{cases}$$

dvs. $u = 1_{[0,1]}$. Vis, at u er Riemann-integrabel (benyt fx Theorem 11.8 (ii)). Vis, at der ikke findes nogen kontinuert funktion $v\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ så $u = v$ λ-næsten overalt.

Idet u er begrænset og kun har ét diskontinuitetspunkt, nemlig 1, følger af Theorem 11.8 (ii), at u er Riemann-integrabel. Hvis der fandtes en kontinuert funktion $v\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ så $u = v$ λ-næsten overalt, ville $U := \{x \in [0,2] \mid 0 < v(x) < 1\}$ være den tomme mængde. Antag nemlig for modstrid, at der fandtes et $x_0 \in U$. Grundet kontinuitet af v findes nu $\delta > 0$ således at

$$|v(x) - v(x_0)| < \min\{v(x_0), 1 - v(x_0)\}$$

for $x \in [0,2]$ med $|x - x_0| < \delta$. For sådanne x vil $v(x) - v(x_0) < 1 - v(x_0)$ og $v(x_0) - v(x) < v(x_0)$ hvormed $v(x) < 1$ og $v(x) > 0$, altså $x \in U$. Altså indeholder U mængden $A = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0,2]$. Lader vi $a = \max\{0, x_0 - \delta\}$ og $b = \min\{x_0 + \delta, 2\}$, påstår vi, at $a < b$: hvis $a = 0$, vil $a < \delta < x_0 + \delta$ og $a < 2$, og hvis $a = x_0 - \delta$, vil $a < x_0 + \delta$ og $a < x_0 \le 2$. Endvidere vil $(a,b) \subseteq A$, så $\lambda(A) \ge \lambda((a,b)) = b - a > 0$. Da u kun antager værdierne 0 og 1, vil $A \subseteq \{u \ne v\}$, således at

$$\lambda(\{u \ne v\}) \ge \lambda(A) > 0.$$

Altså strider $U \ne \emptyset$ imod antagelsen, at $u = v$ λ-næsten overalt, så $U = \emptyset$. Altså må $v(x) \notin (0,1)$ for alle $x \in [0,2]$. Der er nu tre tilfælde, som fører til en samlet modstrid:

1. Hvis $v(x) \leq 0$ for alle $x \in [0,2]$, vil $[0,1] \subseteq \{u \neq v\}$, hvormed $\mu(\{u \neq v\}) \geq 1 > 0$, en modstrid.
2. Hvis $v(x) \geq 1$ for alle $x \in [0,2]$, vil $(1,2] \subseteq \{u \neq v\}$, hvormed $\mu(\{u \neq v\}) \geq 1 > 0$, igen en modstrid.
3. Hvis der findes $x_1, x_2 \in [0,2]$ så $v(x_1) \leq 0$ og $v(x_2) \geq 1$, må der grundet kontinuitet af v gælde, at $[0,1] \subseteq v([x_1, x_2])$, hvilket medfører at der findes et $x \in [x_1, x_2]$ så $v(x) = \frac{1}{2}$, atter en modstrid.

Uanset hvad kommer vi frem til en modstrid, så en funktion v med de antagede egenskaber findes altså ikke.

(ii)

Lad C være en afsluttet delmængde af $[0,1]$, og lad E være en delmængde af C. Vis at 1_E er kontinuert på den åbne mængde $[0,1] \setminus C$. Konkluder, at 1_E er Riemann integrabel hvis $\lambda(C) = 0$. [Bemærkning: Man kan benytte dette eksempel til at konstruere en Riemann-integrabel funktion, som ikke er Borel-målelig, ved at vælge C til at være Cantor-mængden og E til at være en delmængde af C, som ikke er en Borel-mængde. (Eksistensen af en sådan mængde E er dog ikke-trivielt!)]

Idet $[0,1] \setminus C \subseteq [0,1] \subseteq E$, vil $1_E(x) = 0$ for alle $x \in [0,1] \setminus C$, hvormed 1_E er konstant og dermed kontinuert. Altså vil mængden af diskontinuitetspunkter for 1_E være indeholdt i C. Hvis $\lambda(C) = 0$, vil mængden af diskontinuitetspunkter også have Lebesgue-mål 0, således at Theorem 11.8 (ii) giver, at 1_E er Riemann-integrabel.

11.4

Lad $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ være en føgle af integrable funktioner på $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Vis at hvis $\sum_{j=1}^{\infty} \int |u_j| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ vil rækken $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ konvergere næsten overalt mod en reel funktion $u \colon X \to \mathbb{R}$, og at vi så har

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} u_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int u_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Idet funktionerne $|u_j|$ for $j \in \mathbb{N}$ alle er målelige og positive, følger af Corollary 9.9, at

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int |u_j| \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Jf. Opgave 10.6 vil nu gælde, at den målelige, numeriske funktion $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ er reel næsten overalt. Specielt er rækken $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ absolut konvergent og dermed konvergent for næsten alle $x \in X$. Lad $u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ for disse $x \in X$ og sæt $u(x)$ lig dit yndlingstal for de $x \in X$ således at $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j(x)| = \infty$. Vi har da, at

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) = u(x)$$

næsten overalt. Definerer vi nu målelige funktioner $u_N = \sum_{j=1}^{N} u_j$ for $N \in \mathbb{N}$, vil $u_N \to u$ for $N \to \infty$ punktvist næsten overalt, og samtidig vil $|u_N| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Da den sidste funktion er integrabel, følger at alle u_N'er er integrable, samt at de har en integrabel majorant. Da følger af Lebesgues DCT (Theorem 11.2), at

$$\sum_{j=1}^{N} \int u_j \, \mathrm{d}\mu = \int u_N \, \mathrm{d}\mu \to \int u \, \mathrm{d}\mu = \int \sum_{j=1}^{\infty} u_j \, \mathrm{d}\mu$$

for $N \to \infty$. Derfor fås det ønskede.

11.3

Pratts lemma. Lad $(f_k)_k$, $(g_k)_k$ og $(G_k)_k$ være følger af integrable funktioner på et målrum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Hvis

(i) $f_k(x) \to f(x)$, $g_k(x) \to g(x)$ og $G_k(x) \to G(x)$ for $k \to \infty$ og alle $x \in X$,

(ii) $g_k(x) \leq f_k(x) \leq G_k(x)$ for alle $k \in \mathbb{N}$ og $x \in X$, og

(iii) $\int g_k \, \mathrm{d}\mu \to \int g \, \mathrm{d}\mu$, $\int G_k \, \mathrm{d}\mu \to \int G \, \mathrm{d}\mu$, hvor $\int g \, \mathrm{d}\mu$ og $\int G \, \mathrm{d}\mu$ er endelige,

da vil $\int f_k \, \mathrm{d}\mu \to \int f \, \mathrm{d}\mu$ og $\int f \, \mathrm{d}\mu$ er endelig.

Bemærk først, at f er integrabel. Vi har nemlig fra (i) og (ii), at $g(x) \leq f(x) \leq G(x)$, og dermed $|f| \leq \max\{|g|, |G|\} \leq |g| + |G|$. Da både $|g|$ og $|G|$ er integrable (da g og G er integrable), vil $|f|$ og dermed f være integrabel.

Definér $h_k \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ og $H_k \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ ved

$$h_k(x) = f_k(x) + g_k(x), \quad H_k(x) = G_k(x) - f_k(x)$$

for $k \in \mathbb{N}$ og $x \in X$. Da giver Fatous lemma, idet h_k'erne og H_k'erne er positive målelige funktioner, at $f - g = \liminf_{k\to\infty} h_k$ og $G - f = \liminf_{k\to\infty} H_k$ er målelige, samt at

$$\begin{aligned}
\int (f - g) \, \mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{k\to\infty} h_k \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int h_k \, \mathrm{d}\mu \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(\int f_k \, \mathrm{d}\mu - \int g_k \, \mathrm{d}\mu \right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu - \int g \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

idet f_k og g_k er integrable for alle $k \in \mathbb{N}$ og $\int g_k \, \mathrm{d}\mu \to \int g \, \mathrm{d}\mu$, samt at

$$\begin{aligned}
\int (G - f) \, \mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{k\to\infty} H_k \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int H_k \, \mathrm{d}\mu \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(\int G_k \, \mathrm{d}\mu - \int f_k \, \mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int G \, \mathrm{d}\mu + \liminf_{k\to\infty} \left(- \int f_k \, \mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int G \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

da f_k og G_k er integrable for alle $k \in \mathbb{N}$ og $\int G_k \, \mathrm{d}\mu \to \int G \, \mathrm{d}\mu$. Specielt vil

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int (f - g) \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu$$

og

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int G \, \mathrm{d}\mu - \int (G - f) \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu,$$

idet f, g og G er integrable. Altså vil

$$\limsup_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Dermed vil $\limsup_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu$, så $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu$ eksisterer og er lig $\int f \, \mathrm{d}\mu$.

11.7

Lad λ være det endimensionale Lebesgue-mål. Vis, at vi for enhver integrabel funktion u har, at integralfunktionen

$$t \mapsto \int_{(0,t)} u(x) \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

er kontinuert. Hvad sker hvis vi skifter λ ud med et andet Borel-mål μ?

Hvis man prøver, får man problemer med at benytte Theorem 11.4 direkte på $U\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ givet ved $U(t,x) = 1_{(0,t)}(x)u(x)$, så vi benytter en anden tilgang. Lad μ være et vilkårligt Borel-mål under hvilket u er integrabel. Da vil for alle $t>0$ gælde, at $1_{(0,t)}u$ og $1_{(0,t]}u$ er integrable. Derfor kan vi definere

$$I_1(t) = \int_{(0,t)} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad I_2(t) = \int_{(0,t]} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

for alle $t>0$. For at vise, at I_1 er kontinuert i et $t_0>0$, er det nok at vise, at $I_1(t)$ går imod $I_1(t_0)$ når $t\to t_0$ fra skiftevis højre og venstre. Lad derfor følger $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ og $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ så $s_j < t_0 < t_j$ for alle $j\in\mathbb{N}$ og så $s_j\to t_0$ og $t_j\to t_0$ for $j\to\infty$. Da vil

$$1_{(0,s_j)}(x)\to 1_{(0,t_0)}(x), \quad 1_{(0,t_j)}(x)\to 1_{(0,t_0]}(x)$$

for $j\to\infty$:

1. Hvis $x\geq t_0$, vil $1_{(0,s_j)}(x)=0$ og $1_{(0,t_0)}(x)=0$, og hvis $x<t_0$, findes der $N\in\mathbb{N}$ så $t_0-s_j = |t_0-s_j| < t_0-x$ og dermed $x<s_j$ for $j\geq N$, således $1_{(0,s_j)}(x) = 1 = 1_{(0,t_0)}(x)$ for alle $j\geq N$.
2. Hvis $x\leq t_0$, vil $1_{(0,t_j)}(x)=1$ og $1_{(0,t_0]}(x)=1$. Hvis $x>t_0$, findes $N\in\mathbb{N}$ så $t_j-t_0 = |t_j-t_0| < x-t_0$, således at $t_j<x$, hvormed $1_{(0,t_j)}(x) = 0 = 1_{(0,t_0)}(x)$.

Grundet Lebesgues DCT (Theorem 11.2) fås nu, at

$$I_1(s_j) = \int 1_{(0,s_j)}(x)u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \to \int 1_{(0,t_0)}(x)u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = I_1(t_0)$$

og

$$I_1(t_j) = \int 1_{(0,t_j)}(x)u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \to \int 1_{(0,t_0]}(x)u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = I_2(t_0)$$

for $j\to\infty$. Vi ønsker, at $I_1(t_0)=I_2(t_0)$; hvis dette er tilfældet, er I_1 kontinuert i t_0. Idet

$$\begin{aligned}
I_2(t_0)-I_1(t_0) &= \int_{(0,t_0]} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{(0,t_0)} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int 1_{\{t_0\}}(x)u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int 1_{\{t_0\}}(x)u(t_0)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \mu(\{t_0\})u(t_0),
\end{aligned}$$

idet $1_{\{t_0\}}(x)u(x) = 1_{\{t_0\}}(x)u(t_0)$ for alle $x\in\mathbb{R}$. Da vi ved intet om $u(t_0)$, har vi i hvert fald, at $\mu(\{t_0\})=0$ medfører, at $I_1(t_0)=I_2(t_0)$. Altså kan vi konkludere, at I_1 er kontinuert i t_0 hvis $\mu(\{t_0\})=0$, og dette gælder for Lebesgue-målet i alle t_0.

(11.13)

Eulers gammafunktion. Vis, at funktionen

$$\Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x}x^{t-1}\,\mathrm{d}x, \quad t>0,$$

(i)

... er m gange differentiabel med

$$\Gamma^{(m)}(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x}x^{t-1}(\log x)^m\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

for alle $m\in\mathbb{N}$.

Vi vil gerne benytte induktion, men viser dertil først følgende lemma.

Lemma 1. *For $c > -1$ og $d < 0$ findes der $M > 0$ så $e^{dx}x^c < Mx^{-2}$ for alle $x \geq 1$.*

Bevis. Vi ved, at $e^{dx}x^{c+2} \to 0$ for $x \to \infty$, så der findes specielt $M_1 > 1$ således at $x > M_1$ medfører $e^{dx}x^{c+2} < 1$. Specielt vil $e^{dx}x^c < x^{-2}$. For $x \in [1, M_1]$ er $x \mapsto e^{dx}x^{c+2}$ kontinuert og antager dermed et maksimum $C > 0$. Da vil $e^{dx}x^{c+2} \leq C$ og dermed $e^{dx}x^c \leq Cx^{-2}$ for $x \in [1, M_1]$. Definerer vi nu $M = \max\{1, C\}$, har vi det ønskede M. $\square$

Lemma 2. *For $c, d > 0$ findes der $N > 0$ så $x^c(\log \frac{1}{x})^d \leq Nx^{-1/2}$ for alle $x \in (0, 1)$.*

Bevis. Bemærk, at $\log \frac{1}{x} = -\log x > 0$ for $x \in (0, 1)$. For $x \in (0, 1)$ med $x = e^{-u}$ vil

$$x^{c+1/2}\left(\log \frac{1}{x}\right)^d = e^{-u(c+1/2)}u^d \to 0$$

hvis $u \to \infty$, dvs. hvis $x \to 0^+$. Altså findes $\delta > 0$ så $|x^{c+1/2}(\log \frac{1}{x})^d| < 1$ for $0 < x < \delta$. Hvis $\delta \geq 1$, er vi færdige, thi vi benytter $C = 1$. Hvis $\delta < 1$, bemærker vi, at $x \mapsto x^{c+1/2}(\log \frac{1}{x})^d$ er kontinuert på $[\delta, 1]$ og dermed har et maksimum C. Sættes $N = \max\{1, C\}$, er vi færdige. $\square$

Induktionsstarten lyder, at vi skal vise at Γ er differentiabel med ovenstående udtryk med $m = 1$ er differentialkvotienten; endvidere kan vi nøjes med at gøre det på delintervaller $(a, b) \subseteq (0, \infty)$. Lad $\gamma\colon (a, b) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ være givet ved $\gamma(t, x) = e^{-x}x^{t-1}$. Da har vi:

(a) For fast $t \in (a, b)$ har vi, at $e^{-x}x^{t-1} \leq e^0x^{a-1} = x^{a-1}$ for $x \in (0, 1)$, og hvis $x \geq 1$, vil jf. ovenstående lemma findes $M > 0$ så

$$e^{-x}x^{t-1} \leq e^{-x}x^{b-1} \leq Mx^{-2},$$

idet $b - 1 > -1$. Altså vil

$$|\gamma(t, x)| \leq 1_{(0,1)}(x)x^{a-1} + 1_{[1,\infty)}(x)Mx^{-2}.$$

Vi ved, at $x \mapsto 1_{(0,1)}(x)x^{a-1}$ og $x \mapsto 1_{[1,\infty)}(x)x^{-2}$ er integrable jf. Supplerende opgave 1 fra Uge 5, så jf. Theorem 10.4 vil $x \mapsto \gamma(t, x)$ være integrabel.

(b) For fast $x > 0$ er $t \mapsto e^{-x}x^{t-1} = e^{-x}e^{\log(x)(t-1)}$ klart differentiabel med

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, x) = e^{-x}e^{\log(x)(t-1)}\log x = e^{-x}x^{t-1}\log x.$$

(c) Lad $x \geq 1$ og $t \in (a, b)$. Da vil

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, x)\right| = |e^{-x}x^{t-1}\log x| \leq e^{-x}x^{t-1}x = e^{-x}x^t \leq e^{-x}x^b \leq Mx^{-2}$$

for et $M > 0$, idet $|\log x| = \log x \leq x - 1 \leq x$. Hvis $x \in (0, 1)$, vil $|\log x| = -\log x = \log \frac{1}{x}$, hvormed

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, x)\right| = e^{-x}x^{t-1}\log \frac{1}{x} \leq e^0x^{a-1}\log \frac{1}{x} \leq Nx^{-1/2}$$

for et $N > 0$ jf. ovenstående lemma. Altså har vi samlet set

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, x)\right| \leq 1_{(0,1)}(x)Nx^{-1/2} + 1_{[1,\infty)}Mx^{-2},$$

som er en integrabel majorant i x.

Altså følger nu af Theorem 11.5, at Γ er differentiabel med

$$\Gamma'(t) = \int_{(0,\infty)} \frac{\partial\gamma}{\partial t}(t, x)\,\mathrm{d}x = \int_{(0,\infty)} e^{-x}x^{t-1}\log x\,\mathrm{d}x.$$

Nu til induktionsstarten (suk). Vi antager, at Γ er m gange differentiabel med $\Gamma^{(m)}$ som i ligning (1). Vi benytter atter Theorem 11.5, så på den igen: vi sætter $\gamma\colon (a, b) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ lig $\gamma(t, x) = e^{-x}x^{t-1}(\log x)^m$ og har nu:

(a) For fast $t \in (a,b)$ vil for $x \in (0,1)$ haves, at

$$|e^{-x}x^{t-1}(\log x)^m| \leq e^0 x^{a-1}|\log(x)|^m = x^{a-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^m \leq Nx^{-1/2}$$

for et $N > 0$ og hvis $x \geq 1$, findes $M > 0$ så

$$|e^{-x}x^{t-1}(\log x)^m| \leq e^{-x}x^{b-1}x^m = e^{-x}x^{m+b-1} \leq Mx^{-2},$$

idet $\log(x) \leq 1$ og $m + b - 1 > -1$ (som ovenfor). Altså vil

$$|\gamma(t,x)| \leq 1_{(0,1)}(x)x^{a-1} + 1_{[1,\infty)}(x)Mx^{-2},$$

og dermed vil $x \mapsto \gamma(t,x)$ være integrabel.

(b) For fast $x > 0$ har vi igen differentiabilitet af $t \mapsto \gamma(t,x)$ med

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,x) = e^{-x}e^{\log(x)(t-1)}(\log x)^m\log(x) = e^{-x}x^{t-1}(\log x)^{m+1}.$$

(c) For $x \geq 1$ og $t \in (a,b)$ vil

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,x)\right| = |e^{-x}x^{t-1}(\log x)^{m+1}| \leq e^{-x}x^{t-1}x^{m+1} = e^{-x}x^{t+m} \leq e^{-x}x^{b+m} \leq Mx^{-2}$$

for et $M > 0$, idet $|\log x| \leq x$ og $b + m > -1$. Hvis $x \in (0,1)$, har vi

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,x)\right| = e^{-x}x^{t-1}|\log x|^m \leq e^0 x^{a-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^m \leq Nx^{-1/2}$$

for et $N > 0$ jf. ovenstående lemma. Altså har vi samlet set

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,x)\right| \leq 1_{(0,1)}(x)Nx^{-1/2} + 1_{[1,\infty)}Mx^{-2},$$

som igen er en integrabel majorant i x.

Af Theorem 11.5 følger nu induktionsskridtet, og det ønskede er vist for vilkårlige delintervaller $(a,b) \subseteq (0,\infty)$, hvormed det følger for hele $(0,\infty)$, at Γ er m gange differentiabel. Kort sagt: hvis nogen spørger dig, om du gider at vise at gammafunktionen er vilkårligt ofte differentiabel, så slå dem med en forhammer.

(ii)

... opfylder $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $t > 0$. Da er funktionen $\gamma_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $\gamma_n(x) = 1_{[\frac{1}{n},n]}(x)e^{-x}x^t$ kontinuert på $[\frac{1}{n}, n]$ og dermed Riemann-integrabel på det interval. Sættes $f(x) = e^{-x}$ og $g(x) = x^t$, er F kontinuert overalt med stamfunktion $x \mapsto -e^{-x}$ og g er differentiabel med afledet $x \mapsto tx^{t-1}$. Nu fås så ved partiel integration, at

$$\begin{aligned}\int_{1/n}^{n}\gamma_n(x)\,\mathrm{d}x &= [-e^{-x}x^t]_{1/n}^{n} - \int_{1/n}^{n}(-e^{-x})tx^{t-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{-1/n}}{n^t} - e^{-n}n^t + t\int_{1/n}^{n}e^{-x}x^{t-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Definerer vi $\tilde{\gamma}_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\tilde{\gamma}_n(x) = 1_{[\frac{1}{n},n]}(x)e^{-x}x^{t-1}$, vil denne også være kontinuert og dermed Riemann-integrabel på $[\frac{1}{n}, n]$. Defineres nu $\gamma, \tilde{\gamma}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ved

$$\gamma(x) = 1_{(0,\infty)}(x)e^{-x}x^t, \quad \tilde{\gamma}(x) = 1_{(0,\infty)}(x)e^{-x}x^{t-1},$$

har vi, idet vi fandt i (a), at både γ_n'erne og $\tilde{\gamma}_n$'erne havde en integrabel majorant for et fast t. Idet $\gamma_n \to \gamma$ og $\tilde{\gamma}_n \to \tilde{\gamma}$ punktvist overalt på $\mathbb{R}$, følger nu af Lebesgues DCT, at

$$\begin{aligned}
\Gamma(t+1) = \int 1_{(0,\infty)}(x) e^{-x} x^t \, \mathrm{d}x = \int \gamma \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \gamma_n \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{n} \gamma_n(x) \, \mathrm{d}x \\
= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{-1/n}}{n^t} - e^{-n} n^t + t \int_{1/n}^{n} e^{-x} x^{t-1} \, \mathrm{d}x \right] \\
= t \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{n} e^{-x} x^{t-1} \, \mathrm{d}x \\
= t \lim_{n\to\infty} \int \tilde{\gamma}_n \, \mathrm{d}\lambda = t \int \tilde{\gamma} \, \mathrm{d}\lambda = t\Gamma(t).
\end{aligned}$$

(iii)

... er logaritmisk konveks, dvs. $t \mapsto \log \Gamma(t)$ er konveks.

Det bliver virkelig svært, hvis man følger hintet, så det gør vi ikke. En funktion f er konveks på et interval I, hvis der for alle $x, y \in I$ og $\lambda \in (0,1)$ gælder, at

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Kort sagt er f konveks på I, hvis der for alle $x, y \in I$ gælder, at linjen gående imellem $(x, f(x))$ og $(y, f(y))$ hele tiden befinder sig over selve funktionen. Tag for eksempel $x \mapsto x^2$; dette er en konveks funktion.

Vi lader derfor $s, t > 0$. Lad dernæst $1 < p < \infty$ og lad $q > 1$ således at $1/p + 1/q = 1$. Vi tager forskud på godterne i Kapitel 12. Idet $-1 = -1/p - 1/q$ og $-x = -x/p - x/q$ for alle $x \in (0, \infty)$, har vi dermed

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) &= \int_{(0,\infty)} e^{-x} \left(x^{s/p + t/q - 1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{s/p} x^{t/q} x^{-1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{-x/p} e^{-x/q} x^{s/p} x^{t/q} x^{-1/p} x^{-1/q} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,\infty)} \left(e^{-x/p} x^{s/p} x^{-1/p} \right) \left(x^{t/q} x^{-1/q} e^{-x/q} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,\infty)} \left(e^{-x} x^{s-1} \right)^{1/p} \left(e^{-x} x^{t-1} \right)^{1/q} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Idet $x \mapsto 1_{(0,\infty)}(x)(e^{-x}x^{s-1})^{1/p}$ tilhører $\mathcal{L}^p(\lambda)$ og $x \mapsto 1_{(0,\infty)}(x)(e^{-x}x^{t-1})^{1/q}$ tilhører $\mathcal{L}^q(\lambda)$ og begge funktioner er positive, har vi nu ved Hölders ulighed (Theorem 12.2), at

$$\Gamma\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \left(\int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} = \Gamma(s)^{1/p} \Gamma(t)^{1/q}.$$

Lad nu $\lambda \in (0,1)$. Sættes $p = \frac{1}{\lambda} > 1$, vil det $q > 1$ så $1/p + 1/q = 1$ opfylde

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \lambda,$$

hvormed

$$\log \Gamma(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \log \left(\Gamma(s)^{1/p} \Gamma(t)^{1/q} \right) = \log \left(\Gamma(s)^{\lambda} \Gamma(t)^{1-\lambda} \right) = \lambda \log \Gamma(s) + (1-\lambda) \log \Gamma(t),$$

idet $x \mapsto \log x$ er voksende. Altså er Γ logaritmisk konveks.

11.14

Vis, at $x \mapsto x^n f(u,x)$, hvor $n \in \mathbb{N}_0$ og $f(u,x) = e^{ux}/(e^x+1)$, $0 < u < 1$, er integrabel over $\mathbb{R}$, og at $g(u) := \int x^n f(u,x)\,\mathrm{d}x$, $0 < u < 1$, er uendeligt ofte differentiabel.

Vi lader $(a,b) \subseteq (0,1)$ være et delinterval, lader $u \in (a,b)$ og $n \in \mathbb{N}_0$. For $x \geq 0$

$$|x^n f(u,x)| = \left|\frac{x^n e^{ux}}{e^x+1}\right| \leq \frac{x^n e^{ux}}{e^x} = x^n e^{(u-1)x} \leq x^n e^{(b-1)x}.$$

Hvis $x \in [0,1]$ vil $x^n \leq 1$ og $e^{(b-1)x} \leq e^0 = 1$, så ovenstående funktion er mindre end $1_{[0,1]}(x)$ på dette interval. Jf. Lemma 1 ovenfor findes $M_1 > 0$ så $|x^n e^{(b-1)x}| \leq M_1 x^{-2}$ på $(1,\infty)$, hvormed

$$|x^n f(u,x)| \leq 1_{[0,1]}(x) + M_{1[1,\infty)}(x)x^{-2}$$

for $x \geq 0$. For $x < 0$ vil

$$|x^n f(u,x)| = \left|\frac{x^n e^{ux}}{e^x+1}\right| \leq |x|^n e^{ux} = |x|^n e^{-u|x|} \leq |x|^n e^{-a|x|},$$

idet $|x| = -x$. For $x \in [-1,0]$ vil $|x|^n \leq 1$ og $e^{-a|x|} \leq e^0 = 1$, så $|x|^n e^{-a|x|} \leq 1$ på $[-1,0]$. Tager vi $M_2 > 0$ så $y^n e^{-ay} \leq M_2 y^{-2}$ for alle $y > 1$, vil specielt gælde for $x < 1$, at $|x| > 1$, hvormed $|x|^n e^{-a|x|} \leq M_2 |x|^{-2}$. Vi slutter alt i alt, at

$$\begin{aligned} |x^n f(u,x)| &\leq 1_{[0,1]}(x) + M_1 1_{(1,\infty)}(x)x^{-2} + 1_{[-1,0]}(x) + M_2 1_{(-\infty,1)}(x)|x|^{-2} \\ &\leq 1_{[-1,1]}(x) + (M_1+M_2)1_{(-\infty,1)\cup(1,\infty)}(x)|x|^{-2}. \end{aligned}$$

Ovenstående sidste funktion er integrabel, da både $x \mapsto 1_{(-\infty,1)}(x)|x|^{-2}$ og $x \mapsto 1_{(1,\infty)}(x)|x|^{-2}$ er integrable funktioner (se igen Supplerende opgave 1, Uge 5). Altså har $x \mapsto |x^n f(u,x)|$ en integrabel majorant, og må jf. Theorem 10.3 selv være integrabel, uanset (a,b) og u.

For at vise det sidste, benytter vi igen induktion. Vi benytter igen et vilkårligt delinterval $(a,b) \subseteq (0,1)$. Induktionsstarten er som følger: vi har allerede vist, at $\gamma\colon (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $\gamma(u,x) = x^n f(u,x)$ er integrabel når u holdes fast. Endvidere vil for fast $x \in \mathbb{R}$ gælde, at $u \mapsto \gamma(u,x)$ er differentiabel med

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u,x) = \frac{x^{n+1}e^{ux}}{e^x+1} = x^{n+1}f(u,x).$$

Bemærk nu, at $n+1 \in \mathbb{N}_0$. Ovenfor viste vi, at der fandtes en positiv integrabel funktion $w_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, således at $|x^N f(u,x)| \leq w_N(x)$ for alle $N \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ og $u \in (a,b)$. Specielt vil der findes en sådan for $N = n+1$, således at den sidste betingelse i Theorem 11.5 er opfyldt, hvormed g er differentiabel på (a,b) med

$$g'(u) = \int x^{n+1} f(u,x)\,\mathrm{d}x.$$

Induktionsskridtet følger også af denne betragtning; integrabilitetsbetingelserne i Theorem 11.5 vises her ved at lade $N = n+m$ samt $N = n+m+1$ for et givet $m \in \mathbb{N}_0$. Således får vi, at

$$g^{(m)}(u) = \int x^{n+m+1} f(u,x)\,\mathrm{d}x.$$

Da (a,b) var vilkårligt, sluttes, at g er uendeligt ofte differentiabel på $(0,1)$.

(11.18)

Antag, at $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er Borel-målelig, positiv og uegentligt Riemann-integrabel. Vis, at u også er Lebesgue-integrabel.

Pr. antagelse er $u_n = 1_{[0,n]}u$ Riemann-integrabel på intervallet $[0,n]$ og dermed Lebesgue-integrabel jf. Theorem 11.8. Idet u_n er en voksende funktionsfølge af målelige positive funktioner med grænsefunktion u, har vi Beppo-Levis sætning (9.6), at

$$\int u\,\mathrm{d}\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n\,\mathrm{d}\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^n u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

hvormed u er Lebesgue-integrabel. Sidste lighedstegn følger af, at tallene $\int_0^n u(x)\,\mathrm{d}x$ udgør en voksende følge, således at grænsen for denne er lig dens supremum; og vi ved jo, at grænsen er det uegentlige Riemann-integral.

12.1

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et endeligt målrum og lad $1 \leq q < p < \infty$.

(i)

Vis, at $\|u\|_q \leq \mu(X)^{1/q-1/p}\|u\|_p$.

Antag, at $u \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Sættes $s = \frac{p}{q}$ og $t = \frac{p}{p-q}$ vil $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$. Endvidere vil

$$\int 1^t \,\mathrm{d}\mu = \mu(X) < \infty,$$

således at $1 \in \mathcal{L}^t(\mu)$. Idet

$$\int (|u|^q)^s \,\mathrm{d}\mu = \int |u|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

vil $|u|^q \in \mathcal{L}^s(\mu)$, så jf. Hölders ulighed (Theorem 12.2) gælde, at

$$\|u\|_q^q = \int |u|^q \,\mathrm{d}\mu = \int |u|^q \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |u|^{qs}\right)^{1/s} \left(\int 1^t \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/t} = \left(\int |u|^p\right)^{q/p} \mu(X)^{1/t}.$$

Bemærk, at $\frac{1}{t} = \frac{p-q}{p}$. Opløftes i $\frac{1}{q}$, fås derfor

$$\|u\|_q \leq \left(\int |u|^p\right)^{1/p} \mu(X)^{1/qt} = \|u\|_p \mu(X)^{(p-q)/pq} = \|u\|_p \mu(X)^{1/q-1/p},$$

akkurat som ønsket.

(ii)

Konkludér, at $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\mu)$ for alle $p \geq q \geq 1$ og at en Cauchy-følge i $\mathcal{L}^p$ også er en Cauchy-følge i $\mathcal{L}^q$.

Sæt $M = \mu(X)^{1/q-1/p}$. Hvis $u \in \mathcal{L}^p(\mu)$, vil

$$\int |u|^q \,\mathrm{d}\mu \leq (M\|u\|_p)^q < \infty$$

jf. ovenstående delopgave. Altså vil $u \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Endvidere har vi, at hvis $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $\mathcal{L}^p$, vil $u_j \in \mathcal{L}^q(\mu)$ for alle j. For alle $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så $j, k \geq N$ medfører $\|u_j - u_k\|_p < \frac{\varepsilon}{M}$. Altså gælder for alle $j, k \geq N$, at

$$\|u_j - u_k\|_q \leq M\|u_j - u_k\|_p < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

således at $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $\mathcal{L}^q$.

(iii)

Gælder dette stadig hvis μ ikke er endeligt?

Nej, selvfølgelig ikke! Tag fx Lebesgue-målet på $[1, \infty)$. Sætter vi $u\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ lig $u(x) = \frac{1}{x}$, ved vi, at $u \notin \mathcal{L}^1([1,\infty), \lambda)$. Imidlertid vil $|u(x)|^2 = \frac{1}{x^2}$ være integrabel, så $u \in \mathcal{L}^2([1,\infty), \lambda)$, hvormed $\mathcal{L}^2([1,\infty), \lambda) \nsubseteq \mathcal{L}^1([1,\infty), \lambda)$.

(12.2)

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et generelt målrum og $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$. Vis, at $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$ ved at vise

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_q^{1-\lambda}, \quad u \in \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu),$$

hvor $\lambda = (\frac{1}{r} - \frac{1}{q})/(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Dette er lidt svært, men vi prøver. Lad $u \in \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$. Bemærk først, at $|u|^r = |u|^{r\lambda}|u|^{r(1-\lambda)}$ for alle $\lambda \in (0,1)$. Antag $s, t > 1$ opfylder $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$. Antag endvidere, at

$$\int |u|^{r\lambda s} \, \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int |u|^{r(1-\lambda)t} \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

for et $\lambda \in (0,1)$, altså at $|u|^{r\lambda} \in \mathcal{L}^s(\mu)$ og $|u|^{r(1-\lambda)} \in \mathcal{L}^t(\mu)$. Vi vil bruge dette til at finde nogle passende s og t, og bagefter vise, at lige netop disse s og t kan bruges. Under antagelsen har vi jf. Hölders ulighed, at

$$\begin{aligned}
\int |u|^r \, \mathrm{d}\mu &= \int |u|^{r\lambda}|u|^{r(1-\lambda)} \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int |u|^{r\lambda s} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/s} \left(\int |u|^{r(1-\lambda)t} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/t} \\
&\leq \left(\int |u|^{r\lambda s} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\lambda/\lambda s} \left(\int |u|^{r(1-\lambda)t} \, \mathrm{d}\mu \right)^{(1-\lambda)/(1-\lambda)t} .
\end{aligned}$$

Opløftes i $\frac{1}{r}$, fås

$$\|u\|_r \leq \left(\int |u|^{r\lambda s} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\lambda/r\lambda s} \left(\int |u|^{r(1-\lambda)t} \, \mathrm{d}\mu \right)^{(1-\lambda)/r(1-\lambda)t} = \|u\|_{r\lambda s}^\lambda \|u\|_{r(1-\lambda)t}^{1-\lambda}.$$

Vi ønsker derfor, at $r\lambda s = p$ og at $r(1-\lambda)t = q$ eller $rt - r\lambda t = q$. Hvis dette gælder, vil

$$\begin{aligned}
&\frac{r\lambda}{p} + \frac{r(1-\lambda)}{q} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q} = \frac{1}{r} \\
&\Rightarrow \frac{q\lambda}{pq} + \frac{p(1-\lambda)}{pq} = \frac{1}{r} \\
&\Rightarrow q\lambda + p(1-\lambda) = \frac{pq}{r} \\
&\Rightarrow \lambda(q-p) = \frac{pq}{r} - p \\
&\Rightarrow \lambda = \frac{\frac{pq}{r} - \frac{pr}{r}}{q-p} = \frac{\frac{pq}{pqr} - \frac{pr}{pqr}}{\frac{q}{pq} - \frac{p}{pq}} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

i hvilket fald

$$s = \frac{p}{\lambda r} = \frac{p}{\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \right) r} = \frac{p(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}{(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})r} = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \frac{r}{q}} = \frac{q-p}{q-r}$$

og

$$t = \frac{q}{r(1-\lambda)} = \frac{q}{\left(1 - \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\right) r} = \frac{q}{\left(\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} - \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\right) r} = \frac{q}{\left(\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\right) r} = \frac{q(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}{(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})r} = \frac{\frac{q}{p} - 1}{\frac{r}{p} - 1} = \frac{q-p}{r-p}.$$

Sætter vi nu λ, s og t lig disse, vil $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, og idet

$$\lambda s = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \frac{q-p}{q-r} = \frac{\frac{pq}{r} - \frac{pq}{q}}{\frac{pq}{p} - \frac{pq}{q}} \frac{q-p}{q-r} = \frac{\frac{pq}{r} - p}{q-p} \frac{q-p}{q-r} = \frac{\frac{pq}{r} - p}{q-r} = \frac{\frac{pq}{r} - \frac{pr}{r}}{q-r} = \frac{\frac{p}{r}(q-r)}{q-r} = \frac{p}{r},$$

og tilsvarende $(1-\lambda)t = \frac{q}{r}$, følger nu, at $\int |u|^{r\lambda s} \, \mathrm{d}\mu < \infty$ og $\int |u|^{r(1-\lambda)t} \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Derfor vil $|u|^{r\lambda} \in \mathcal{L}^s(\mu)$ og $|u|^{r(1-\lambda)} \in \mathcal{L}^t(\mu)$, så deres produkt $|u|^r$ ligger i $\mathcal{L}^1(\mu)$, hvormed $u \in \mathcal{L}^r(\mu)$. Endvidere har vi også normuligheden som vist ovenfor.

12.3

Udvid beviset for Hölders ulighed (12.2) til $p = 1$ og $q = \inf ty$, dvs. vis, at

$$\int |uv| \,\mathrm{d}\mu \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_\infty$$

gælder for alle $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ og $v \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Husk først, at $v \in \mathcal{L}^\infty$ hvis og kun hvis der findes $C > 0$ således at $\mu(\{|u| > C\}) = 0$. Lad $n \in \mathbb{N}$. Idet $\|v\|_\infty = \inf\{C \geq 0 \,|\, \mu(\{|u| > C\}) = 0\} < \infty$, findes $C > 0$ hvor $\mu(\{|u| > C\}) = 0$ således at $\|v\|_\infty + \frac{1}{n} > C$. Lad $N = \{|v| > C\}$. For $x \in N^c$ vil altså gælde $|v(x)| \leq C$, hvormed Nu vil

$$\begin{aligned}
\int |uv| \,\mathrm{d}\mu \leq \int |u(x)||v(x)| \,\mathrm{d}\mu &= \int 1_{N^c}(x)|u(x)||v(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int 1_{N^c}(x)|u(x)|C \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= C \int |u(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \left(\|v\|_\infty + \frac{1}{n}\right) \|u\|_1.
\end{aligned}$$

Da n var vilkårligt, vil resultatet også gælde for $n \to \infty$, således at

$$\int |uv| \,\mathrm{d}\mu \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty.$$

12.7

Betragt det endimensionale Lebesgue-mål på $[0, 1]$. Bekræft, at følgen $u_n(x) := n 1_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ for $n \in \mathbb{N}$ konvergerer punktvist mod funktionen $u \equiv 0$, men at ingen delfølge af (u_n) konvergerer i $\mathcal{L}^p$-forstand for noget $p \geq 1$.

Vi så i Uge 5, at (u_n) konvergerede punktvist imod 0. Lad (u_{n_k}) være en delfølge af (u_n). Hvis denne følge konvergerede i $\mathcal{L}^p$ mod en funktion $v \in \mathcal{L}^p$, ville jf. Corollary 12.8 findes en delfølge $(u_{n_{k_j}})$ af delfølgen, så $u_{n_{k_j}} \to v$ for næsten alle $x \in [0, 1]$. Da enhver delfølge af en konvergent følge konvergerer mod det samme som den konvergente følge, må $u_{n_{k_j}} \to u = 0$, således at $v(x) = 0$ for næsten alle $x \in [0, 1]$. Dette er en modstrid, idet

$$\|u_{n_{k_j}} - v\|_p = \int_{[0,1]} |u_{n_{k_j}} - v|^p \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(0,\frac{1}{n_{k_j}})} n_{k_j}^p \,\mathrm{d}\lambda = n_{k_j}^p \frac{1}{n_{k_j}} = n_{k_j}^{p-1} \not\to 0$$

for $j \to \infty$.

12.8

Lad $p, q \in [1, \infty]$ være konjugerede indices ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) og antag at $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^p$ og $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^q$ er følger med grænser u i $\mathcal{L}^p$ hhv. w i $\mathcal{L}^q$. Vis, at $u_k w_k$ konvergerer i $\mathcal{L}^1$ mod uw.

Bemærk først, at $u_k w_k \in \mathcal{L}^1$ for alle $k \in \mathbb{N}$ og $uw \in \mathcal{L}^1$ grundet Hölders ulighed. Vi har jf. samme for alle $k \in \mathbb{N}$, at

$$\begin{aligned}
\|u_k w_k - uw\|_1 &= \|u_k w_k - u_k w + u_k w - uw\|_1 \\
&= \|u_k(w_k - w)\|_1 + \|(u_k - u)w\|_1 \\
&\leq \|u_k\|_p \|w_k - w\|_q + \|u_k - u\|_p \|w\|_q.
\end{aligned}$$

Lader vi $\varepsilon > 0$, findes $N_1 \in \mathbb{N}$ så $\|u_k - u\|_p < \frac{\varepsilon}{2(\|w\|_q+1)}$ for $k \geq N_1$. Dermed vil

$$\|u_k\|_p \leq \|u\|_p + \|u_k - u\|_p \leq \|u\|_p + \frac{\varepsilon}{2(\|w\|_q + 1)} =: M$$

grundet Minkowskis ulighed (Corollary 12.4) for alle $k \geq N$. Lader vi slutteligt $N_2 \in \mathbb{N}$ så $\|w_k - w\|_q < \frac{\varepsilon}{2M}$, vil

$$\|u_k w_k - uw\|_1 \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(\|w\|_q + 1)} \cdot \|w\|_q \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

for $k \geq \max\{N_1, N_2\}$. Dermed følger det ønskede.

12.15

Lad $u_n \in \mathcal{L}^p$, $p \geq 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvad kan siges om u og w, hvis man ved at $\lim_{n\to\infty} \int |u_n - u|^p \, \mathrm{d}\mu = 0$ og $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = w(x)$ for næsten alle x?

Ret meget! Første fact giver, at (u_n) konvergerer imod u i $\mathcal{L}^p$-forstand. Jf. Corollary 12.8 findes en delfølge (u_{n_k}), så $u_{n_k}(x) \to u(x)$ for næsten alle x. Da $u_n(x) \to u(x)$, vil også $u_{n_k}(x) \to u(x)$ for næsten alle x, så vi kan slutte at $u = w$ er lig hinanden næsten overalt.

12.21

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrum og lad $1 \leq p < \infty$. Vis at $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{L}^p(\mu)$ hvis og kun hvis $f \in \mathcal{E}$ og $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$. Specielt vil $\mathcal{E} \cap \mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{E} \cap \mathcal{L}^1(\mu)$.

Lad $f \in \mathcal{E}$ og opskriv f ved en standardrepræsentation

$$f = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} y_j,$$

hvor A_j'erne er disjunkte målelige mængder i $\mathcal{A}$ og y_j'erne er reelle tal. Da vil $|f| = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} |y_j|$. Vi kan nu antage, at $0 < |y_1| < |y_2| < \cdots < |y_n|$; hvis ikke det er tilfældet, fjernes alle led med $|y_j| = 0$, så omnummereres efter størrelse, og hvis der er lighed ved to på hinanden følgende $|y_j|$'er i nummereringen, forenes de tilhørende A_j'er. Bemærk da, at $\{f \neq 0\} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Hvis $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{L}^p(\mu)$, vil

$$\infty > \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \mu(A_j) \geq \sum_{j=1}^{n} |y_1|^p \mu(A_j) = |y_1|^p \mu(\{f \neq 0\}),$$

hvormed $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$. Hvis der omvendt gælder, at $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$, vil

$$\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \mu(A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} |y_n|^p \mu(A_j) = |y_n|^p \mu(\{f \neq 0\}) < \infty,$$

så det ønskede er vist. Vi har til sidst $\mathcal{E} \cap \mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{E} \cap \mathcal{L}^1(\mu)$, idet begge mængder er lig mængden af simple funktioner f på $(X, \mathcal{A})$ med $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$.