Analyse 2

Øvelser

Rasmus Sylvester Bryder

22. og 25. oktober 2013

Supplerende opgave 1

Lad $C([a,b],\mathbb{C})$ betegne rummet af alle kontinuerte funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, hvor $a < b$, og definér et indre produkt på $C([a,b],\mathbb{C})$ ved

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f,g \in C([a,b],\mathbb{C}).$$

Du kan efter ønske opfatte integralet som et Riemann-integral eller et Lebesgue-integral (idet de to er identiske på $C([a,b],\mathbb{C})$ jf. Theorem 11.8.)

(i)

Vis, at hvis $f \in C([a,b],\mathbb{C})$, så er $f = 0$ λ-næsten overalt hvis og kun hvis $f = 0$ (overalt).

Det er klart, at $f = 0$ overalt medfører at $f = 0$ λ-næsten overalt. Antag derfor, at $f = 0$ λ-n.o. og definér $U = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\}$. Da er U urbilledet af den åbne mængde $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ under f og dermed selv åben, idet f er kontinuert. Hvis der fandtes et punkt $x_0 \in [a,b]$ således at $f(x_0) \neq 0$, ville $x_0 \in U$. Da U er åben, ville der dermed findes en åben kugle $K(x_0,r) \subseteq U$, hvor $r > 0$. Sættes $v = \max\{a, x_0 - r\}$ og $w = \min\{b, x_0 + r\}$, vil $v < w$ (dette så vi i Supplerende opgave 3, uge 6), og $(v,w) \subseteq K(x_0,r)$, hvormed $\lambda(U) \geq \lambda((v,w)) = w - v > 0$. Dette strider imod, at f var lig 0 λ-næsten overalt, således, at U må være tom, hvormed $f = 0$ overalt.

(ii)

Eftervis, at formlen ovenfor faktisk definerer et indre produkt på $C([a,b],\mathbb{C})$.

(SP_2) og (SP_3) er nemme: for $f,g,h \in C([a,b],\mathbb{C})$ og $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ vil

$$\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\overline{h(x)}\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\overline{h(x)}\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\overline{h(x)}\,\mathrm{d}x = \alpha\langle f,h\rangle + \beta\langle g,h\rangle$$

og

$$\overline{\langle g,f\rangle} = \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \overline{g(x)\overline{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \overline{g(x)}\overline{\overline{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \langle f,g\rangle.$$

Altså er $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ovenfor en sesquilineær form. Slutteligt skal vi tjekke definithed (SP_1); vi viser for $f \in C([a,b],\mathbb{C})$, at $\langle f,f\rangle \geq 0$ og at $\langle f,f\rangle = 0$ medfører $f = 0$. Først og fremmest har vi klart, at

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

idet $|f(x)|^2 \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$. Hvis $\langle f,f\rangle = 0$, vil

$$\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Eftersom $x \mapsto |f(x)|^2$ er Lebesgue-integrabel på $[a,b]$ og positiv, følger nu af Theorem 10.9 (i), at $|f(x)|^2 = 0$ λ-næsten overalt. Altså må $f(x) = 0$ λ-næsten overalt, men da følger af (i), at $f = 0$. Altså er $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et indre produkt.

(iii)

Beskriv normen $\|\cdot\|$ på $C([a,b],\mathbb{C})$ der kommer fra det indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Vi har for $f \in C([a,b],\mathbb{C})$, at

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

som netop er $\|\cdot\|_2$-normen af f i rummet $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([a,b],\lambda)$ (hvor f naturligvis er indeholdt). Bemærk for $f, g \in C([a,b],\mathbb{C})$, at $f = g$ λ-næsten overalt hvis og kun hvis $f = g$ overalt jf. (i), således at $[f] = [g]$ i $L^2_{\mathbb{C}}([a,b],\lambda)$ hvis og kun hvis $f = g$. Inklusionen $f \mapsto [f]$ er derfor en injektiv lineær afbildning $C([a,b],\mathbb{C}) \to L^2_{\mathbb{C}}([a,b],\lambda)$. Faktisk har denne afbildning tæt billede i $L^2_{\mathbb{C}}([a,b],\lambda)$ (dette vil vi dog ikke vise; men noget af beviset kommer af Supplerende opgave 5).

Vis eventuelt de næste tre delopgaver. Lad nu $[a,b] = [0,1]$. Betragt en følge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq C([0,1],\mathbb{C})$, givet ved $0 \leq f_n(x) \leq 1$ for alle $n \geq 1$ og alle $x \in [0,1]$, $f_n(x) = 0$ for $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}]$ og $f_n(x) = 1$ for $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

(iv)

Vis, at $\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$ for alle $n, m \geq N$. Konkludér, at $(f_n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy-følge.

Lad $N \in \mathbb{N}$ og $n, m \geq N$. Antag uden tab af generalitet, at $n \geq m$. Da har vi, at $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1}$ og dermed $\frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$. Idet vi regner med Riemann-integraler, får vi

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|^2 &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}} |0 - 0|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - 1|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{2}} 1 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

Ved tredje lighedstegn benyttede vi, at $f_m(x) = f_n(x) = 1$ for $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, samt $f_n(x) = f_m(x) = 0$ for $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}] \subseteq [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}]$. Endvidere vil $f_n(x), f_m(x) \in [0,1]$ for alle $x \in [0,1]$, så $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ for alle $x \in [0,1]$, hvilket vi benyttede til uligheden. Altså har vi vist det ønskede, hvormed vi konkluderer, at $(f_n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy-følge: for $\varepsilon > 0$ kan vi tage $N \in \mathbb{N}$ så $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$, hvormed $\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$ for $n, m \geq N$.

(v)

Lad $g \in C([0,1],\mathbb{C})$. Sæt $U = g^{-1}((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ og sæt $V_n = [\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}]$. Vis at

$$\|g - f_n\|^2 \geq \frac{1}{9}(\lambda(U) - \lambda(V_n))$$

for alle $n \geq 1$.

Lad $n \in \mathbb{N}$. Sæt

$$W_n = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

og husk, at $f_n(x) = 0$ for $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}]$ og $f_n(x) = 1$ for $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Hvis $x \in U \cap W_n$, vil $f_n(x) \in \{0, 1\}$ og $\frac{1}{3} < g(x) < \frac{2}{3}$; vi konkluderer af dette, at $|g(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{3}$, hvormed

$$\|g - f_n\|^2 = \int_0^1 |g(x) - f_n(x)|^2 \, dx \geq \int_{U \cap W_n} |g(x) - f_n(x)|^2 \, dx \geq \int_{U \cap W_n} \frac{1}{9} \, dx = \frac{1}{9} \lambda(U \cap W_n).$$

Vi har nu, at

$$\lambda(U \cap W_n) = \lambda(U) + \lambda(W_n) - \lambda(U \cup W_n) = \lambda(U) + (1 - \lambda(V_n)) + \lambda(U \cup W_n) \geq \lambda(U) - \lambda(V_n),$$

hvilket giver det ønskede.

(vi)

Vis, at $C([0, 1], \mathbb{C})$ *ikke* er et Hilbert-rum. (Benyt (v) og betragt tilfældene $U = \emptyset$ og $U \neq \emptyset$ separat.)

Vi vil gerne komme frem til, at Cauchy-følgen $(f_n)_{n \geq 1}$ ikke konvergerer imod nogen funktion $g \in C([0, 1], \mathbb{C})$ i $\| \cdot \|_2$-normen, hvormed $C([0, 1], \mathbb{C})$ ikke kan være fuldstændigt under denne norm. Antag derfor for modstrid, at $f_n \to g$ for et $g \in C([0, 1], \mathbb{C})$, dvs. $\|g - f_n\| \to 0$.

Idet vi lader U og V_n være som i (v), har vi, at

$$0 \leq \lambda(U) \leq 9\|g - f_n\|^2 + \lambda(V_n) \to 0.$$

Da følger, at $\lambda(U) = 0$. Bemærk nu, at U er åben, idet g er kontinuert. Hvis U var ikke-tom, ville U indeholde et ikke-tomt interval og dermed have Lebesgue-mål strengt større end 0 (som set i (i)), i modstrid med hvad vi har fundet. Altså må U være tom, dvs. der gælder for alle $x \in [0, 1]$, at $g(x) \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Bemærk nu, at g er nødt til at være reel. Jf. Corollary 12.8 findes en delfølge (f_{n_k}) af (f_n) så $f_{n_k}(x) \to g(x)$ næsten overalt på $[0, 1]$. Dermed vil g være reel næsten overalt, så $\mathrm{Im}(g)$ er lig 0 næsten overalt. Da $\mathrm{Im}(g)$ er kontinuert, idet g er kontinuert og $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ er afstandsformindskende, vil jf. (i) gælde, at $\mathrm{Im}(g) = 0$ overalt, så g er reel.

Idet g er reel og kontinuert, må $U = \emptyset$ medføre enten at $g(x) \leq \frac{1}{3}$ for alle $x \in [0, 1]$ eller at $g(x) \geq \frac{2}{3}$ for alle $x \in [0, 1]$ (der kan ikke gælde at der findes punkter $x_1, x_2 \in [0, 1]$ så $g(x_1) \leq \frac{1}{3}$ og $g(x_2) \geq \frac{2}{3}$, idet dette ville betyde at g ville antage alle værdier imellem $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$).

Hvis $g \leq \frac{1}{3}$ for alle $x \in [0, 1]$, ville $|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) - g(x) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ for alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Da ville

$$\|g - f_n\|^2 = \int_0^1 |g(x) - f_n(x)|^2 \, dx \geq \int_{1/2}^1 |g(x) - f_n(x)|^2 \, dx \geq \int_{1/2}^1 \frac{4}{9} \, dx = \frac{2}{9}$$

grundet monotoni og diverse sætninger fra Kapitel 9, som Rasmus er for træt til at slå op. Dette strider imod, at $\|g - f_n\|^2 \to 0$, så der må altså gælde, at $g \geq \frac{2}{3}$. Dette medfører, at $|f_n(x) - g(x)| = g(x) \geq \frac{2}{3}$ for $n \geq 2$ og $x \in [0, \frac{1}{6}]$ (vi har for $n \geq 2$, at $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, hvormed $f_n(x) = 0$ for $x \in [0, \frac{1}{6}]$). Altså vil

$$\|g - f_n\|^2 = \int_0^1 |g(x) - f_n(x)|^2 \, dx \geq \int_0^{1/6} |g(x) - f_n(x)|^2 \, dx \geq \int_0^{1/6} \frac{4}{9} \, dx = \frac{2}{27},$$

som igen strider imod, at $\|g - f_n\|^2 \to 0$. Altså kan $(f_n)_{n \geq 1}$ ikke konvergere under $\| \cdot \|$ mod nogen funktion $g \in C([0, 1], \mathbb{C})$, hvormed vi slutter, at $C([0, 1], \mathbb{C})$ ikke er et Hilbert-rum.

Supplerende opgave 2

Verificér, at rummene $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, hvor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, fra Example 20.5 (ii) er Hilbert-rum.

Først og fremmest er $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, som vi fremover døber ℓ^2, et vektorrum. For $x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$ og $\lambda \in \mathbb{K}$ defineres $x + y = (x_n + y_n)_{n \geq 1}$ og $\lambda x = (\lambda x_n)_{n \geq 1}$. Det er klart, at $\lambda x \in \ell^2$, idet

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$; for $N \in \mathbb{N}$ definerer vi $x' = (x_1, \ldots, x_N), y' = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{K}^N$, hvorpå vi har, at

$$\sum_{n=1}^{N}|x_n + y_n|^2 = \sum_{n=1}^{N}|x_n|^2 + \sum_{n=1}^{N}|y_n|^2 + \sum_{n=1}^{N}(x_n\overline{y_n} + \overline{x_n}y_n) \leq \|x\|_{\ell^2}^2 + \|y\|_{\ell^2}^2 + \sum_{n=1}^{N}(x_n\overline{y_n} + \overline{x_n}y_n).$$

Idet

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n\overline{y_n} + y_n\overline{x_n}) = \langle x', y'\rangle + \langle y', x'\rangle = 2\mathrm{Re}\langle x', y'\rangle \leq 2|\langle x', y'\rangle| \leq 2\|x'\|_{\mathbb{K}^N}\|y'\|_{\mathbb{K}^N} \leq 2\|x\|_{\ell^2}\|y\|_{\ell^2}$$

ved at benytte Cauchy-Schwarz' ulighed på $\mathbb{K}^N$ får vi derfor, at

$$\sum_{n=1}^{N}|x_n + y_n|^2 \leq \|x\|_{\ell^2}^2 + \|y\|_{\ell^2}^2 + 2\|x\|_{\ell^2}\|y\|_{\ell^2} = (\|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2})^2$$

for alle $N \in \mathbb{N}$. Derfor vil $x + y \in \ell^2$.

Det indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{K}$ givet ved

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}, \quad x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$$

er veldefineret. Vi har netop for $N \in \mathbb{N}$ og $x, y \in \ell^2$, at vi ved at definere $x' = (|x_1|, \ldots, |x_N|), y' = (|y_1|, \ldots, |y_N|) \in \mathbb{K}^N$ får

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}|x_n\overline{y_n}| &= \sum_{n=1}^{N}|x_n||y_n| \\
&\leq \langle x', y'\rangle_{\mathbb{K}^N} \\
&\leq \|x'\|\|y'\| \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{1/2} < \infty,
\end{aligned}$$

således at summen i det indre produkt er absolut konvergent for $x, y \in \ell^2$, og tallet $\langle x, y\rangle$ dermed findes i $\mathbb{K}$. Det er nu let at tjekke, at $\langle\cdot,\cdot\rangle$ er et indre produkt: det er klart lineært i første variabel, skævsymmetrisk, idet konjugering er en kontinuert operation, hvormed

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty}y_n\overline{x_n}} = \overline{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}y_n\overline{x_n}} = \lim_{N\to\infty}\overline{\sum_{n=1}^{N}y_n\overline{x_n}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x_n\overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n} = \langle x, y\rangle.$$

Endvidere medfører $\|x\| = 0$ ligheden $x = 0$ for $x \in \ell^2$.

Slutteligt skal vi vise, at metrikken frembragt af det indre produkt er fuldstændig. Lad derfor $(x^k)_{k\geq 1}$ være en Cauchy-følge i ℓ^2. Husk på at hver $x^k \in \ell^2$ er en følge i selv; vi skriver $x^k = (x_n^k)_{n\geq 1}$. For fast $n \geq 1$ og $k, \ell \in \mathbb{N}$ vil der gælde, at

$$|x_n^k - x_n^\ell| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^k - x_n^\ell|^2\right)^{1/2} = \|x^k - x^\ell\|.$$

Dette medfører, at $(x_n^k)_{k\geq 1}$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{K}$ for alle $n \geq 1$. Da $\mathbb{K}$ selv er fuldstændigt, findes der $x_n \in \mathbb{K}$ således at $x_n^k \to x_n$ for $k \to \infty$. Vi betragter nu følgen $x = (x_n)_{n\geq 1}$ som opnås på denne følge. Vi påstår, at (1) $x \in \ell^2$ og (2) $x^k \to x$ i ℓ^2.

For $\varepsilon > 0$ lader vi nu $M \geq 1$ således at $\|x^k - x^\ell\| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $k, \ell \geq M$, hvilket er muligt idet $(x^k)_{k\geq 1}$ er en Cauchy-følge. Specielt vil

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^k - x_n^M|^2 \leq \|x^k - x^M\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

for alle $N \geq 1$ og $k \geq M$. Hvis $N \geq 1$ er fast og vi lader $k \to \infty$, får vi dermed, at

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n - x_n^M|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Derfor vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^M|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4} < \infty,$$

hvorpå vi har at $y = (x_n - x_n^M)_{n\geq 1} \in \ell^2$. Idet $(x_n)_{n\geq 1} = y + x^M \in \ell^2$, får vi nu, at $x \in \ell^2$. For $k \geq M$ vil vi slutteligt have

$$\|x - x^k\| \leq \|x - x^M\| + \|x^M - x^k\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^M|^2\right)^{1/2} + \|x^M - x^k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

således at $x^k \to x$.

20.4

Kommer normen $\|\cdot\|_1$ på $L^1([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda^1|_{[0,1]})$ fra et indre produkt?

Nej, desværre. Dette skyldes, at normen ikke opfylder parallelogramloven: sæt for eksempel $v(x) = x$ og $w(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0,1]$. Da vil

$$\left\|\frac{v+w}{2}\right\|_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|x + \frac{1}{2}\right| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

og

$$\left\|\frac{v-w}{2}\right\|_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8},$$

samt $\|v\|_1 = \frac{1}{2}$ og $\|w\|_1 = \frac{1}{2}$, men

$$\left\|\frac{v+w}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{v-w}{2}\right\|_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{17}{64} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

20.6

Lad V være et indre produkt-rum. Vis, at $v \perp w$ hvis og kun hvis Pythagoras' sætning $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ gælder.

Dette gælder ikke, medmindre V har et reelt indre produkt. Bemærk generelt, at

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v + w\rangle + \langle w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

for alle $v, w \in V$. Hvis $v \perp w$, dvs. $\langle v, w\rangle = 0$, er det klart, at Pythagoras' sætning gælder. Omvendt vil Pythagoras' sætning medføre, at $\mathrm{Re}\langle v, w\rangle = 0$. Hvis det indre produkt er reelt, er det klart, at $v \perp w$. Som modeksempel til det generelle tilfælde kan vi betragte $v = 1$ og $w = i$ i $\mathbb{C}$ med det indre produkt $\langle v, w\rangle = v\overline{w}$. Da vil $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$ og $\|v + w\|^2 = 2$, men $\langle v, w\rangle = -i \neq 0$.

21.2

Vis, at $g \mapsto \langle g, h \rangle$, $h \in \mathcal{H}$ er kontinuert.

For $g_1, g_2 \in \mathcal{H}$ vil

$$|\langle g_1, h \rangle - \langle g_2, h \rangle| = |\langle g_1 - g_2, h \rangle| \leq \|g_1 - g_2\| \|h\|$$

jf. Cauchy-Schwarz' ulighed. Altså er afbildningen $g \mapsto \langle g, h \rangle$ Lipschitz, og dermed kontinuert.

Supplerende opgave 3

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert-rum, og lad $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for $\mathcal{H}$. Lad $x, y \in \mathcal{H}$ og antag, at

$$\langle x, e_k \rangle = \frac{1}{2^k}, \quad \langle y, e_k \rangle = (-1)^k \frac{1}{2^k},$$

for alle $k \in \mathbb{N}$.

(i)

Beregn $\|x\|$, $\|y\|$ og $\langle x, y \rangle$.

Da $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis, fås af Theorem 21.13, at

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3},$$

og

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3},$$

således at $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Slutteligt følger af samme sætning, at

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot (-1)^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} - 1 = -\frac{1}{5}.$$

(ii)

For hvilke $r > 0$ findes $z \in \mathcal{H}$ så

$$\langle z, e_k \rangle = k^{-r}$$

for alle $k \in \mathbb{N}$?

Antag at der for $r > 0$ findes z med ovenstående egenskab. Da vil

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle z, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}.$$

Da ovenstående række konvergerer, må der gælde, at $2r > 1$, dvs. $r > \frac{1}{2}$. Hvis vi omvendt har, at $r > \frac{1}{2}$, vil der gælde, at $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-r}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} < \infty$. Da fås ved Theorem 21.11, at følgen $(\sum_{k=1}^{m} k^{-r} e_k)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergerer imod et element z i $\mathcal{H}$. Idet det indre produkt er kontinuert i begge variable, vil

$$
\begin{aligned}
\langle z, e_k \rangle &= \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} j^{-r} e_j, e_k \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k+m} j^{-r} e_j, e_k \right\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{k+m} j^{-r} e_j, e_k \right\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{k+m} j^{-r} \langle e_j, e_k \rangle \right) \\
&= \lim_{m\to\infty} k^{-r} = k^{-r},
\end{aligned}
$$

idet $\langle e_j, e_k\rangle = 0$ for $j \neq k$ og $\langle e_k, e_k\rangle = 1$. Altså gælder det ønskede for $r > \frac{1}{2}$.

(Bemærk, at dette kan benyttes til at vise, at hvis $\sum_{k=1} |c_k|^2 < \infty$ og $z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, vil $\langle z, e_k\rangle = c_k$ for alle $k \in \mathbb{N}$.)

Supplerende opgave 4

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert-rum, og lad $y \in \mathcal{H}$, $y \neq 0$, være givet. Vis, at mængden

$$M = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, y\rangle = 0\}$$

er et afsluttet underrum af $\mathcal{H}$. Bestem $M^\perp$.

Bemærk, at $M = \{y\}^\perp$. Da får vi jf. Lemma 21.4, at M er et afsluttet underrum af $\mathcal{H}$.

Da $M = \{y\}^\perp$, vil $M^\perp = \{y\}^{\perp\perp} := (\{y\}^\perp)^\perp$. Bemærk først, at $M^\perp = \{y\}^{\perp\perp} \supseteq \{y\}$ er et underrum der indeholder y jf. Lemma 21.4. Altså vil $\mathbb{C}y \subseteq M^\perp$, hvor $\mathbb{C}y$ er det afsluttede underrum $\{\lambda y \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{H}$. Bemærk nu, at hvis $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \mathcal{H}$ er delmængder, vil $N_2^\perp \subseteq N_1^\perp$ (hvis $x \in N_2^\perp$, vil $\langle x, z\rangle = 0$ for alle $z \in N_2$ og specielt for alle $z \in N_1$, så $x \in N_1^\perp$). Af dette får vi, at $\{y\}^\perp \supseteq (\mathbb{C}y)^\perp$ og dermed $\{y\}^{\perp\perp} \subseteq (\mathbb{C}y)^{\perp\perp}$. Da $\mathbb{C}y$ er et afsluttet underrum, vil

$$M^\perp = \{y\}^{\perp\perp} \subseteq (\mathbb{C}y)^{\perp\perp} = \overline{\mathbb{C}y} = \mathbb{C}y$$

jf. Corollary 21.6 (iii) (anden lighed gælder for vilkårlige underrum). Altså vil $M^\perp = \mathbb{C}y$.

(Mere generelt vil $A^{\perp\perp}$ være det mindste afsluttede underrum, der indeholder A.)

Supplerende opgave 5

Betragt målrummet $([0, 2\pi], \mathcal{B}([0, 2\pi]), \lambda)$ og det tilhørende Hilbert-rum $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \lambda)$. For hvert $n \in \mathbb{Z}$ lader vi $e_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ være givet ved

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vis, at $([e_n])_{n\in\mathbb{Z}}$ er et ortonormalt sæt i $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \lambda)$. [Bemærkning: Det er et dybt resultat, som ikke vises i dette kursus, at $([e_n])_{n\in\mathbb{Z}}$ faktisk er en ortonormal *basis* for $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \lambda)$.]

Først og fremmest har vi for $n \in \mathbb{Z}$, at e_n er kontinuert på $[0, 2\pi]$, dermed Riemann-integrabel og jf. Theorem 11.8 også Lebesgue-integrabel. Altså vil $e_n \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \lambda)$. De følgende integraler kan betragtes som både Riemann- og Lebesgue-integralerne; regnereglerne er ens. For $n, m \in \mathbb{Z}$ vil

$$\langle [e_n], [e_m]\rangle = \int_0^{2\pi} e_n(t)\overline{e_m(t)} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \, \mathrm{d}\lambda(t).$$

Hvis $n = m$, vil integranden være lig 1, hvormed $\langle [e_n], [e_m] \rangle = \frac{1}{2\pi}\lambda([0, 2\pi]) = 1$. Hvis ikke, vil

$$\begin{aligned}\langle [e_n], [e_m] \rangle &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n-m)}(e^{2\pi i(n-m)} - e^0) \\ &= \frac{1}{2\pi i(n-m)}((-1)^{2(n-m)} - e^0) = 0.\end{aligned}$$

Altså er $([e_n])_{n\in\mathbb{Z}}$ et ortonormalt sæt i $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \lambda)$.

Supplerende opgave 6

Betragt vektorrummet $C([0, 1], \mathbb{C})$ udstyret med det indre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in C([0, 1], \mathbb{C}),$$

og med tilhørende norm $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$. Lad E være underrummet af $C([0, 1], \mathbb{C})$ udspændt af funktionerne $u_1(x) = 1$ og $u_2(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Lad $h \in C([0, 1], \mathbb{C})$ være givet ved $h(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Vi vælger i denne opgave at betragte $C([0, 1], \mathbb{C})$ som delrum af $L^2([0, 1])$, idet de har samme indre produkt. Da kan vi med fordel benytte, at $L^2([0, 1])$ er et Hilbert-rum og dermed vil resultaterne fra Kapitel 21 kunne bruges.

(i)

Find en ortonormalbasis for E.

Vi benytter Gram-Schmidt-proceduren. Bemærk først, at u_1 og u_2 er lineært uafhængige. Sæt først $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Da $\langle u_1, u_1 \rangle = 1$, vil $e_1(x) = u_1(x) = 1$ for alle $x \in [0, 1]$. Idet

$$\langle u_2, e_1 \rangle = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

og

$$\left\|u_2 - \frac{1}{2}e_1\right\|^2 = \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{12},$$

kan vi sætte

$$e_2 := \frac{u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1\|} = \sqrt{12}(u_2 - \tfrac{1}{2}e_1),$$

hvormed $e_2(x) = \sqrt{12}x - \sqrt{3}$. Da vil $\{e_1, e_2\}$ være en ortonormalbasis for E.

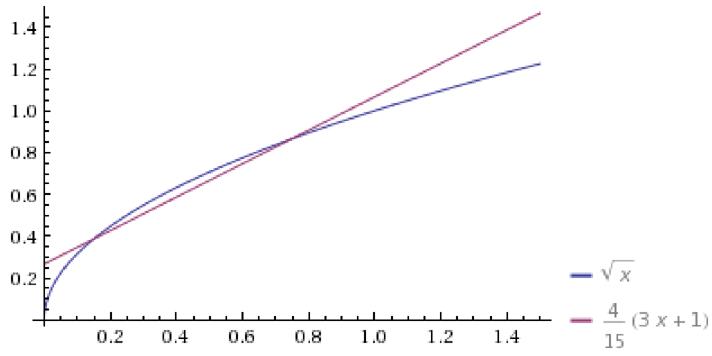
(ii)

Find $a, b \in \mathbb{C}$, som minimerer normen $\|h - au_1 - bu_2\|$. Skitsér grafen for h og $au_1 + bu_2$ i samme koordinatsystem.

Bemærk først ved Theorem 21.11, at E er et afsluttet underrum. Da E er afsluttet og konveks, følger af Projection theorem (21.5), at projektionen $P_E h$ af h på E entydigt minimerer normen $\|h - x\|$ hvor $x \in E$ (dvs. $\|h - P_E h\| \leq \|h - x\|$ for alle $x \in E$), og eftersom ethvert $x \in E$ er på formen $x = au_1 + bu_2$ for $a, b \in \mathbb{C}$, vil $P_E h \in E$ ikke blot minimere normen, men også give os de ønskede $a, b \in \mathbb{C}$... såfremt vi kan finde dem.

Og det kan vi! Jf. Theorem 21.11 vil

$$P_E h = \langle h, e_1 \rangle e_1 + \langle h, e_2 \rangle e_2.$$



Idet

$$\langle h, e_1 \rangle = \int_0^1 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

og

$$\begin{aligned}\langle h, e_2 \rangle &= \int_0^1 (\sqrt{12}x^{3/2} - \sqrt{3}x^{1/2})\, \mathrm{d}x = \left[\frac{2\sqrt{12}}{5}x^{5/2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{12}}{5} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3} - 10\sqrt{3}}{15} = \frac{2\sqrt{3}}{15},\end{aligned}$$

vil

$$(P_E h)(x) = \frac{2}{3}e_1(x) + \frac{2\sqrt{3}}{5}e_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{15}(\sqrt{12}x - \sqrt{3}) = \frac{2}{3} + \frac{12}{15}x - \frac{6}{15} = \frac{4}{5}x + \frac{4}{15}$$

for $x \in [0, 1]$, således at de ønskede $a, b \in \mathbb{C}$ er $a = \frac{4}{5}$ og $b = \frac{4}{15}$.

Nedenfor ses graferne for h og $au_1 + bu_2$ i samme koordinatsystem. Bemærk, at arealet mellem graferne over intervallet $[0, 1]$ er meget småt; det er netop det som minimeringen af normen sørger for.

(iii)

Bestem $\|h\|$, $\|h - au_1 - bu_2\|$ og $\|au_1 + bu_2\|$, hvor a, b er som i spørgsmål (ii).

Takket være Pythagoras' sætning (Theorem 21.11 (ii)) behøver vi kun at finde to af de ovenstående. Først og fremmest vil

$$\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_0^1 x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

således at $\|h\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi har også jf. Theorem 21.11 (i), at $P_E h = au_1 + bu_2$, samt at

$$\|P_E h\|^2 = |\langle h, e_1 \rangle|^2 + |\langle h, e_2 \rangle|^2 = \frac{4}{9} + \frac{12}{225} = \frac{112}{225},$$

således at $\|au_1 + bu_2\| = \|P_E h\| = \frac{4\sqrt{7}}{15}$. Slutteligt følger af Pythagoras, at

$$\|h - P_E h\|^2 = \|h\|^2 - \|P_E h\|^2 = \frac{1}{2} - \frac{112}{225} = \frac{225}{450} - \frac{224}{450} = \frac{1}{450},$$

hvormed

$$\|h - au_1 - bu_2\| = \|h - P_E h\| = \frac{1}{15\sqrt{2}}.$$

Bemærk endvidere, at dette tal er særdeles småt; en fin indikator for at projektionen har minimeret normen i (ii).

(21.6)

Vis, at for $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $w \in \mathcal{H}$, at mængden $M_w^\perp = \{u \in \mathcal{H} \mid \int uw \, \mathrm{d}\mu = 0\}^\perp$ enten er $\{0\}$ eller et endimensionalt underrum i $\mathcal{H}$.

Sætter vi

$$M_w = \{u \in \mathcal{H} \mid \langle u, \overline{w} \rangle = 0\} = \left\{ u \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int uw \, \mathrm{d}\mu = 0 \right\},$$

vil $M_w^\perp = \mathbb{C}\overline{w}$ jf. Supplerende opgave 4, hvis altså $\overline{w} \neq 0$, dvs. $w \neq 0$. Her er $M_w^\perp$ altså et endimensionalt underrum. Hvis $w = 0$, vil $M_w = \mathcal{H}$, hvormed $M_w^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$.

21.7

Lad $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ være et ortonormalt sæt.

(i)

Vis, at ingen delfølge af $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergerer. Dog vil $\lim_{j \to \infty} \langle e_j, h \rangle = 0$ for alle $h \in \mathcal{H}$.

Hvis $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergerede, ville det specielt være en Cauchy-følge. Vi har dog for $j, k \in \mathbb{N}$ med $j \neq k$, at

$$\|e_j - e_k\|^2 = \langle e_j, e_j \rangle - \langle e_j, e_k \rangle - \langle e_k, e_j \rangle + \langle e_k, e_k \rangle = 1 + 1 = 2,$$

således at $\|e_j - e_k\| = \sqrt{2}$. Dermed kan (e_j) ikke være Cauchy.

For $h \in \mathcal{H}$ vil $\sum_{j=1}^\infty |\langle e_j, h \rangle|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle h, e_j \rangle|^2$ konvergere med sum mindre end $\|h\|^2$ jf. Bessels ulighed (Theorem 21.11 (iii)). Da giver Divergenstesten, at leddene i summen går imod 0; dvs. $|\langle e_j, h \rangle|^2 \to 0$ for $j \to \infty$. Kontinuitet af kvadratroden giver nu $|\langle e_j, h \rangle| \to 0$ og dermed $\langle e_j, h \rangle \to 0$ for $j \to \infty$, som ønsket.

(ii)

Vis, at Hilbert-kuben

$$Q := \left\{ h \in \mathcal{H} \;\middle|\; h = \sum_{j=1}^\infty c_j e_j, \; |c_j| \leq \frac{1}{j}, \; j \in \mathbb{N} \right\}$$

er afsluttet, begrænset og kompakt.

Egentlig er det nok at vise, at Q er kompakt; i metriske rum er kompakte mængder afsluttede og begrænsede. Ikke desto mindre indgår afsluttet- og begrænsetheden af Q i beviset for at Q er kompakt, så vi viser disse.

For enhver følge $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ med $|c_j| \leq \frac{1}{j}$ og $h = \sum_{j=1}^\infty c_j e_j$ har vi, at

$$\|h\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2$$

jf. Theorem 21.11 (v). Idet $|c_j|^2 \leq \frac{1}{j}^2$, vil $\|h\|^2 \leq \frac{\pi^2}{6}$, hvilket viser, at Q er begrænset.

Hvis vi endvidere har en følge $(h_n)_{n \geq 1}$ i Q, som konvergerer i $\mathcal{H}$ imod h, har vi følger $(c_n^j)_{j \geq 1}$ for hvert $n \geq 1$ med $|c_n^j| \leq \frac{1}{j}$ og $h_n = \sum_{j=1}^\infty c_n^j e_j$. Sæt nu $c^j = \langle h, e_j \rangle$. Da vil $c_n^j = \langle h_n, e_j \rangle \to \langle h, e_j \rangle = c^j$, så

$$|c^j| = |\langle h, e_j \rangle| = \lim_{n \to \infty} |\langle h_n, e_j \rangle| = \lim_{n \to \infty} |c_n^j| \leq \frac{1}{j}.$$

Det genstår nu at vise, at $h = \sum_{j=1}^\infty c^j e_j$. Lad $\varepsilon > 0$. Da findes $N \in \mathbb{N}$ så $\|h - h_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$. Jf. Theorem 21.11 (i) vil

$$\left\| h - \sum_{j=1}^k c^j e_j \right\| = \left\| h - \sum_{j=1}^k \langle h, e_j \rangle e_j \right\| \leq \left\| h - \sum_{j=1}^k c_N^j e_j \right\| \leq \|h - h_N\| + \left\| h_N - \sum_{j=1}^k c_N^j e_j \right\|,$$

idet $\sum_{j=1}^{k} c_N^j e_j \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ og vi benytter trekantsuligheden. Der findes nu $N_1 \in \mathbb{N}$ så

$$\left\| h_N - \sum_{j=1}^{k} c_N^j e_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

for $k \geq N_1$ (idet $h_N = \sum_{j=1}^{\infty} c_N^j e_j$). Altså har vi for $k \geq N_1$, at

$$\left\| h - \sum_{j=1}^{k} c^j e_j \right\| \leq \|h - h_N\| + \left\| h_N - \sum_{j=1}^{k} c_N^j e_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

hvormed $h = \sum_{j=1}^{\infty} c^j e_j$ og $h \in Q$.

Vi viser nu, at Q er kompakt (og nu bliver det tricky). Lad $(h_n)_{n\geq 1}$ være en følge i Q; vi viser, at (h_n) har en konvergent delfølge.

1. Definér $c_j(n) = \langle h_n, e_j \rangle$, og bemærk, at $|c_1(n)| \leq 1$ for alle $n \geq 1$. Altså er $(c_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ en begrænset følge i $\mathbb{C}$. Jf. Heine-Borels sætning har vi dermed, at denne har en konvergent delfølge $(c_1(n_{1,k}))_{k\in\mathbb{N}}$, hvis grænsepunkt vi kalder c_1.
2. Idet $|c_2(n_{1,k})| = |\langle h_{n_{1,k}}, e_2 \rangle| \leq \frac{1}{2}$, får vi en konvergent delfølge $(c_2(n_{2,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ af $(c_2(n_{1,k}))_{k\in\mathbb{N}}$, hvis grænsepunkt i $\mathbb{C}$ vi kalder c_2. Bemærk, at $(n_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ er en delfølge af $(n_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Rekursivt har vi for $j = m-1$ hvor $m \geq 2$, at $|c_m(n_{m-1,k})| = |\langle h_{n_{m-1,k}}, e_m \rangle| \leq \frac{1}{m}$, således at vi får en konvergent delfølge $(c_m(n_{m,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ af $(c_m(n_{m-1,k}))_{k\in\mathbb{N}}$, hvis grænsepunkt i $\mathbb{C}$ vi kalder c_m. Bemærk, at $|c_m| \leq \frac{1}{m}$, samt at $(n_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}$ er en delfølge af $(n_{m-1,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Man skulle ikke tro det, men denne proces giver os faktisk mulighed for at konstruere et punkt i Q, som er grænsepunkt for en delfølge af $(h_n)_{n\geq 1}$. Bemærk nemlig først for $m \geq 1$, at vi for $k > m$ har at $n_{k,k}$ indgår som følgeelement i $(n_{k-1,j})_{j\geq 1}$. Denne følge er en delfølge af $(n_{k-2,j})_{j\geq 1}$ og så videre og så videre op til $(n_{m,j})_{j\geq 1}$. Altså er $c_m(n_{k,k})$ et følgeelement i $(c_m(n_{m,j}))_{j\geq 1}$. Faktisk er $(c_m(n_{k,k}))_{k>m}$ også en delfølge. For $k > m$ findes $j_0 \geq k$ så $n_{k-1,j_0} = n_{k,k}$ og $j_0' \geq k+1$ så $n_{k,j_0'} = n_{k+1,k+1}$. Da $(n_{k,j})$ er en delfølge af $(n_{k-1,j})$, har vi, at $n_{k,j_0'} = n_{k-1,j_1}$ for et $j_1 \geq j_0'$. Spørgsmålet er så, om

$$n_{k-1,j_1} = n_{k+1,k+1} > n_{k,k} = n_{k-1,j_0}.$$

Husk, at $n_{k+1,k+1} > n_{k+1,k}$. Da der findes $j \geq k$ så $n_{k+1,k} = n_{k,j}$ vil $n_{k,j} \geq n_{k,k}$, hvormed vi får det ønskede: at følgeelementerne i $(n_{k-1,j})_{j\geq 1}$ hørende til $n_{k,k}$ og $n_{k+1,k+1}$ er placeret så den sidste af de to kommer efter den første. Ved at gå igennem delfølgerne op til $(c_m(n_{m,j}))_{j\geq 1}$, får vi at tallet hørende til $n_{k,k}$ er placeret strengt før tallet hørende til $n_{k+1,k+1}$. Altså er $(c_m(n_{k,k}))_{k>m}$ en delfølge af $(c_m(n_{m,j}))_{j\geq 1}$, og dermed må

$$c_m(n_{k,k}) \to c_m$$

for $k \to \infty$. Af dette fås en delfølge $(h_{n_{k,k}})_{k\geq 1}$ af $(h_n)_{n\geq 1}$ så

$$\langle h_{n_{k,k}}, e_m \rangle = c_m(n_{k,k}) \to c_m$$

for alle $m \geq 1$. Vi definerer nu $h = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e_m$; dette element eksisterer i $\mathcal{H}$ ved Parsevals identitet og tilhører Q. Lad $\varepsilon > 0$. Tag $N \in \mathbb{N}$ således at $\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{4}{m^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$ (idet $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m^2}$ er konvergent). For $m = 1, \ldots, N$ tages $M_m \in \mathbb{N}$ så $|c_m - c_m(n_{k,k})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$ for $k \geq M_m$. Da har vi for $k \geq \max\{M_1, \ldots, M_N\}$, at at

$$\begin{aligned}
\|h - h_{n_{k,k}}\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} |c_m - c_m(n_{k,k})|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{N} |c_m - c_m(n_{k,k})|^2 + \sum_{m=N+1}^{\infty} |c_m - c_m(n_{k,k})|^2 \\
&\leq \sum_{m=1}^{N} \frac{\varepsilon^2}{2N} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{4}{m^2} \\
&< \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

idet $|c_m - c_m(n_{k,k})| \leq \frac{2}{m}$ for alle m. Altså vil $h_{k,k} \to h$, så $(h_n)_{n\geq 1}$ har en konvergent delfølge.

(21.12)

Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrum og $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ være parvist disjunkte mængder så $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Definér

$$Y_j := \left\{ u \in L^2(\mu) \,\middle|\, \int_{A_j^c} |u|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0 \right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(i)

Vis at $Y_j \perp Y_k$, hvis $j \neq k$.

Bemærk først, at hvis $u \in Y_j$ (vi skelner ikke mellem repræsentanter for ækvivalensklasser og ækvivalensklasser selv) for et $j \in \mathbb{N}$, vil $|u|^2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, hvormed $1_{A_j^c}|u|^2$ være målelig og integrabel. Jf. Theorem 10.9 fås nu, idet $u \in Y_j$, at $1_{A_j^c}|u|^2 = 0$ næsten overalt på X; altså vil $u(x) = 0$ for næsten alle $x \in A_j^c$, hvilket kan omskrives til, at $1_{A_j^c}|u| = 0$ næsten overalt.

Lad $j, k \in \mathbb{N}$ med $j \neq k$ og tag $u_j \in Y_j$ samt $u_k \in Y_k$. Vi skal vise, at $u_j \perp u_k$. Idet $1_{A_j^c}|u_j| = 0$ næsten overalt og $1_{A_k^c}|u_k| = 0$ ditto, har vi nu

$$\begin{aligned} |\langle u_j, u_k \rangle| &\leq \int |u_j \overline{u_k}| \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int 1_{A_j} |u_j||u_k| \,\mathrm{d}\mu + \int 1_{A_j^c} |u_j||u_k| \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int 1_{A_j} |u_j||u_k| \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Idet $A_j \subseteq A_k^c$, vil

$$\int 1_{A_j} |u_j||u_k| \,\mathrm{d}\mu \leq \int 1_{A_k^c} |u_j||u_k| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

således at $\langle u_j, u_k \rangle = 0$, som ønsket.

(iii)

Find projektionen $P_j \colon L^2(\mu) \to Y_j$.

For $u \in Y_j$ ved vi, at

$$1_{A_j^c}(x)u(x) = 0$$

næsten overalt. Altså må $u = 1_{A_j} u$ næsten overalt (dvs. der gælder lighed i $L^2(\mu)$), så et oplagt bud ville være, at projektionen er givet ved $P_j(u) = 1_{A_j} u$ for $u \in L^2(\mu)$.

First things first. Definér en afbildning $F \colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ved $F(u) = 1_{A_j} u$. Da er F klart veldefineret, idet $\int |1_{A_j} u|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int |u|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty$ for alle $u \in L^2(\mu)$. Det tager ingen tid at se, at F er en lineær afbildning. For alle $u \in L^2(\mu)$ vil

$$\int_{A_j^c} |F(u)|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int 1_{A_j}^c 1_{A_j} |u|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

så $F(u) \in Y_j$. Omvendt vil der for $u \in Y_j$ gælde, at $F(u) = 1_{A_j} u = u$ i $L^2(\mu)$ som fundet ovenfor. Altså har F billede lig Y_j, så Y_j er specielt et underrum. Endvidere er F kontinuert, idet

$$\|F(u) - F(v)\|^2 = \int |1_{A_j} u - 1_{A_j} v|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int 1_{A_j} |u - v|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int |u - v|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \|u - v\|^2$$

for $u, v \in L^2(\mu)$. Dette medfører bl.a. at Y_j er afsluttet; da $u_n \to u$ i $L^2(\mu)$ og $(u_n)_{n\geq 1}$ er en følge i Y_j, vil $u_n = F(u_n) \to F(u)$. Idet $u_n \to u$, må $u = F(u) \in Y_j$.

Nu har vi altså vist, at Y_j er et afsluttet underrum samt at F er en lineær kontinuert afbildning med billede lig Y_j. Det lyder pænt meget som om F er den ønskede projektion; jf. Corollary 21.6 er det eneste vi behøver at tjekke, at $F(u) \in Y_j$ og $u - F(u) \in Y_j^\perp$ for alle $u \in L^2(\mu)$; da må gælde grundet entydighed, at $P_j = F$. Vi ved allerede det første. For $u \in L^2(\mu)$ og $v \in Y_j$ vil $1_{A_j} v = v$ næsten overalt, hvormed

$$\langle u - F(u), v \rangle = \int (u - 1_{A_j} u)\overline{v}\, \mathrm{d}\mu = \int 1_{A_j^c} u \cdot 1_{A_j} \overline{v}\, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Altså følger, at $P_j(u) = 1_{A_j} u$ for $u \in L^2(\mu)$.

Blot for at opsummere: hvis E er et afsluttet underrum af et Hilbert-rum $\mathcal{H}$ og $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ er en afbildning således at $T(h) \in E$ og $h - T(h) \in E^{\perp}$ for alle $h \in \mathcal{H}$, da er $T = P_E$. Dette følger direkte af Corollary 21.6 (ii), og det giver automatisk, at T er lineær. Vi var nødt til at vise en række ting om F ovenfor idet vi ikke vidste om Y_j var et afsluttet underrum; dette fulgte af at (i) F var lineær, (ii) F var kontinuert, (iii) $F(u) = u$ for alle $u \in Y_j$ og (iv) $F(u) \in Y_j$ for alle $u \in L^2(\mu)$. (iii) og (iv) giver tilsammen at F's billede er Y_j, således at (i) giver at Y_j er et underrum. (ii) og (iii) giver nu i fællesskab, at Y_j er afsluttet.