KomAn opgavesæt 2

Rasmus Sylvester Bryder

25. februar 2010

Opgave 4.14

Sæt $C_r = \overline{K(0,r)}$ for $r > 0$. Vi ønsker at vise, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$ konvergerer uniformt mod $\frac{1}{1-z}$ for $z \in C_r$, hvor $r < 1$. Vi søger altså for givet $r < 1$ at vise, at $\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in C_r} |s_n(z) - {}^1\!/_{1-z}| = 0$, hvor

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k, \quad z \in C_r.$$

Lad derfor $0 < r < 1$. For $z \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $(1-z)(1+z+\cdots+z^n)$ er lig $1 - z^{n+1}$; altså

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$$

for alle $z \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$. Vi får nu for $z \in C_r$, at $|z| \leq r$, og vi har endvidere ved et geometrisk argument, at $|1-z| \geq |1-r| = 1-r > 0$, hvorpå

$$\left| s_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \frac{1 - z^{n+1} - 1}{1-z} \right| = \frac{|z^{n+1}|}{|1-z|} = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

for $n \in \mathbb{N}$. Altså vil $0 \leq \sup_{z \in C_r} |s_n(z) - {}^1\!/_{1-z}| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Lader vi $n \to \infty$, vil højresiden gå imod 0, thi $r < 1$. Vi får nu, at

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in C_r} |s_n(z) - {}^1\!/_{1-z}| = 0,$$

grundet klemmelemmaet, hvorpå potensrækken konvergerer uniformt mod $\frac{1}{1-z}$ i C_r.

Der gælder imidlertid ikke, at potensrækken konvergerer uniformt på $K(0,1)$. For at vise dette lader vi $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vi skal nu til ethvert $N \in \mathbb{N}$ finde et $n \geq N$, så $|s_n(z) - \frac{1}{1-z}| \geq \varepsilon$ for et eller andet $z_0 \in K(0,1)$. Men lad da $n = N$ og betragt

$$z_0 = \sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}.$$

Da vil

$$\left| s_n(z_0) - \frac{1}{1-z_0} \right| = \frac{|z_0|^{n+1}}{|1-z_0|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Altså konvergerer potensrækken ikke uniformt på $K(0,1)$.

Opgave 4.19

Vi betragter rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (n^z = \exp(z \ln n),\ z \in \mathbb{C}).$$

Lad $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. Vi ønsker at vise, at rækken er absolut konvergent for alle $z \in A$; vi har for $z \in A$, at $-z \ln n = -\ln n \operatorname{Re} z - i \ln n \operatorname{Im} z$, og at

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\exp(-z \ln n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{-\operatorname{Re} z \ln n}\right| \left|e^{-i \operatorname{Im} z \ln n}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-\operatorname{Re} z}\right| \cdot 1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re} z} < \infty,
\end{aligned}$$

thi vi benyttede, at $|e^{ix}| = 1$ for $x \in \mathbb{R}$, og at $\operatorname{Re} z > 1$, hvorpå vi får, at sidste række er konvergent. Det giver altså mening at definere funktionen $\zeta : A \to \mathbb{C}$ ved $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, og denne kaldes *Riemanns zeta-funktion.*

Denne funktion er holomorf i A. Vi har nemlig først og fremmest, at A er åben i $\mathbb{C}$, samt at funktionen $z \mapsto n^{-z} = \exp(-z \ln n)$ er holomorf for alle $n \in \mathbb{N}$, thi $\exp \in \mathcal{H}(A)$ og funktionen $z \mapsto -z \ln n$ er et polynomium på A for alle $n \in \mathbb{N}$ og dermed holomorf i A (jf. CB s. 13, idet sammensætninger af holomorfe funktioner giver en holomorf funktion).

Vi vil gerne benytte CB 4.19 til at konkludere, at ζ er holomorf. Vi mangler derfor at vise, at ζ konvergerer uniformt lokalt på A. Vi skal derfor jf. CB 4.14 vise, at der for ethvert $a \in A$ findes $r > 0$ så $C_a^r := \overline{K(a, r)} \subseteq A$ og $\sum_{n=1}^{k} n^{-z} \to \zeta(z)$ uniformt på C_a^r.

Lad $a \in A$, og sæt $r := \frac{1}{2}(\operatorname{Re} a - 1)$. Da vil for alle $z \in C_a^r$ gælde, at $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} a - r = \frac{1}{2}\operatorname{Re} a + \frac{1}{2} > 1$, så $C_a^r \subseteq A$. Sæt nu $\beta = \frac{1}{2}\operatorname{Re} a + \frac{1}{2}$; da er $\beta > 1$. Lad $z \in C_a^r$. Vi så før, at $\operatorname{Re} z \geq \beta$, så

$$\left|\sum_{n=1}^{k} n^{-z} - \zeta(z)\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-z}\right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re} z} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\beta}$$

for $k \in \mathbb{N}$. Altså har vi specielt, at

$$0 \leq \sup_{z \in C_a^r} \left|\sum_{n=1}^{k} n^{-z} - \zeta(z)\right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\beta}$$

for alle $k \in \mathbb{N}$. Lader vi $k \to \infty$, vil $\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\beta} \to 0$, da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}$ er absolut konvergent fordi $\beta > 1$. Altså vil supremum også gå imod 0, og dermed har vi uniform konvergens på C_a^r.

Da vi dermed har lokal uniform konvergens, giver CB 4.19 altså, at ζ er holomorf i A.

Betragt følgen af primtal (p_n); $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \cdots$. Lad $z \in A$. Vi har først, at

$$a^z b^z = \exp(z \ln a) \exp(z \ln b) = \exp(z(\ln a + \ln b)) = \exp(z \ln ab) = (ab)^z.$$

Vi definerer nu $\bigstar_n = \{x \in \mathbb{N} \,|\, p_n \mid x\}$. $\bigstar_n$ består altså af alle naturlige tal, som det n'te primtal går op i. Vi har med det første primtal $p_1 = 2$, at

$$\zeta(z)(1-2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} - 2^{-z}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-z}.$$

Her fratrækkes altså alle de led, hvor n er delelig med 2. Det vi får tilbage, er altså $\sum_{n\notin\bigstar_1} n^{-z}$, hvor der summes over alle de n, som ikke er delelige med 2. Vi kan fortsætte med det næste primtal $p_2 = 3$ og får da, at

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z}) = \sum_{n\notin\bigstar_1} n^{-z} - \sum_{n\notin\bigstar_1} (3n)^{-z}.$$

Vi summer altså over alle de $n \in \mathbb{N}$, som ikke er delelige med 2, og trækker alle led fra, hvor n er delelig med 3. Vi får altså den delsum af $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, hvor der summes over n, der ikke er delelige med 2 eller 3, altså $\sum_{n\notin\bigstar_1\cup\bigstar_2} n^{-z}$. Fortsætter vi således for N primtal, får vi, at

$$\zeta(z)\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k^{-z}\right) = \sum_{n\notin\bigcup_{i=1}^{N}\bigstar_i} n^{-z} = 1 + \sum_{n\neq 1\,\wedge\, n\notin\bigcup_{i=1}^{N}\bigstar_i} n^{-z},$$

idet $1^{-z} = \exp(z\ln 1) = \exp 0 = 1$. Vi får nu, at

$$\left|\zeta(z)\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k^{-z}\right) - 1\right| = \left|\sum_{n\neq 1\,\wedge\, n\notin\bigcup_{i=1}^{N}\bigstar_i} n^{-z}\right| \leq \sum_{n\neq 1\,\wedge\, n\notin\bigcup_{i=1}^{N}\bigstar_i} \left|n^{-z}\right|.$$

Vi har først, at $|n^{-z}| = n^{-\operatorname{Re} z}$ jf. tidligere udregninger. Det mindste $n \in \mathbb{N}$, som der summes over, er det $N+1$'te primtal, p_{N+1}, thi alle foregående naturlige tal selv er multipla af primtal mindre end p_{N+1}, og thi p_{N+1} ikke er delelig med p_i for noget $i \in \{1, \ldots, N\}$. Altså kan vi med rette estimere ovenstående, så

$$\left|\zeta(z)\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k^{-z}\right) - 1\right| \leq \sum_{n=p_{N+1}}^{\infty} n^{-\operatorname{Re} z} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re} z}$$

for ethvert $z \in A$, idet den nye sum, som er *positiv*, summer over *alle* naturlige tal større end lig p_{N+1}, hvor den foregående kun summede over de naturlige tal større end lig p_{N+1}, hvor primtallene $p_1, \ldots, p_N$ ikke var divisorer. Vi bruger ovenfor, at $p_{N+1} \geq N+1$ for alle $N \in \mathbb{N}$.

Lader vi $N \to \infty$, vil højresiden gå imod 0, thi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re} z}$ er absolut konvergent (da $\operatorname{Re} z > 1$). Uligheden ovenfor indikerer altså, at

$$\zeta(z)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-p_k^{-z}\right) = 1$$

for *alle* $z \in A$. Dermed får vi nødvendigvis, at $\zeta(z) \neq 0$ for alle z så $\operatorname{Re} z > 1$, thi antagelsen om det modsatte ville føre til en klar modstrid. Endvidere slutter vi, at

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-p_k^{-z}\right) = \frac{1}{\zeta(z)}$$

for alle z, så $\operatorname{Re} z > 1$.