# Sølvkorn 4
# Basalt (og banalt) om følger og haler

*Rasmus Sylvester Bryder*

Der gælder basalt og banalt, at konvergente følgers haler konvergerer imod 0. Det er et faktum! Så meget, at jeg til tider selv tager det lidt for givet. Dette korn er blot for at klargøre det *once and for all.*

**Definition 1.** Alle ved, hvad en følge er, men lad os få det på plads igen: en følge er en afbildning $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, hvortil vi benytter skrivemåden $a_n := a(n)$ og benytter notationen $(a_n)$ for afbildningen. Den siges at *konvergere* imod $a \in \mathbb{C}$, hvis der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$, medfører $|a_n - a| < \varepsilon$. Vi skriver da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

som skal forstås som udtrykket "når $n$ går imod uendelig, vil $a_n$ komme tættere og tættere på $a$". En følge, der ikke er konvergent, kaldes *divergent.*

Følgende sætning er ganske banal, idet den nu følger direkte af definitionen, men ikke desto mindre er den vigtig.

**Sætning 2.** *En følge $(a_n)$ i $\mathbb{C}$ konvergerer imod $a \in \mathbb{C}$ hvis og kun hvis følgen $(a_n - a)$ konvergerer imod 0.*

*Bevis.* Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis $(a_n)$ konvergerer imod $a$, vil der findes et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$ medfører $|a_n - a| = |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$. Det samme $N$ giver altså, at $(a_n - a)$ konvergerer imod 0.

Hvis derimod $(a_n - a)$ konvergerer imod 0, vil der findes $N \in \mathbb{N}$, så $n \geq N$ medfører $|(a_n - a) - 0| = |a_n - a| < \varepsilon$. Altså vil $(a_n)$ konvergere imod $a$. □

**Bemærkning 3.** Det er klart, at $(a - a_n)$ også vil konvergere imod 0. Har vi en konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, giver det mening at betragte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ som et tal i $\mathbb{C}$. Følgen betragtet i forbindelsen med den række er afsnitssummen $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ med grænseværdien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Vi får altså følgen $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n)_{N\in\mathbb{N}}$, og pr. sætningen ovenfor fås, at

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0.$$

$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ kaldes *halen* for rækken, og denne går altså imod 0 for $N \to \infty$.

**Bemærkning 4.** Det er klart jf. sætningen, at man kan ikke snakke om divergente følger og rækker på samme måde. Rækker, der ikke konvergerer, har ingen hale, thi den slet ikke kan defineres; udtrykket $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ i sig selv er da enten ikke defineret eller $\infty$.

**Bemærkning 5.** Kan vi estimere noget numerisk mindre end en hale for en konvergent række, ved vi, at det må gå imod 0. Det følger af, at vi for alle $\varepsilon > 0$ kan vælge $M \in \mathbb{N}$ så $N \geq M$ medfører $|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - 0| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n| < \varepsilon$. Ved vi, at rækken er positiv, gælder, at $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$.