MatM 2008-09
Ugeopgave 3

Rasmus Sylvester Bryder

9. december 2008

Alle definitioner og sætninger er fra undervisningsbogen Matematisk Metode (2008, Ian Kiming og Jesper Lützen).

1 Opgave 7.3.11

7.3.11.1

Vi skal vise, at $\sup[0,1[= 1$.

Først skal vi derfor vise pr. Definition 235, at 1 er en majorant for intervallet $[0,1[$, og endelig at 1 er den mindste majorant for dette interval (altså, at hvis x er en majorant for $[0,1[$, da er $1 \leq x$).

Det følger af intervallet $[0,1[$, at for et vilkårligt $m \in [0,1[$ er $m < 1$, og ydermere at $m \leq 1$, så 1 er altså en majorant for $[0,1[$, pr. Definition 228.

Vi skal nu vise, at 1 er den mindste majorant, og vi skal altså pr. Sætning 236 vise, at vi for alle $x < 1$ kan finde et $a \in [0,1[$, så $x < a$; dette er da ækvivalent med at 1 er supremum for $[0,1[$.

Antag derfor, at $x < 1$. Sæt nu

$$a = \frac{x+1}{2}$$

Vi har for $x \geq 0$, at $a \geq \frac{0+1}{2} \geq 0$. Tilsvarende har vi for $x \geq 0$, da $x < 1$, at $a = \frac{x+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$. For $x < 0$ sættes $a = \frac{1}{2}$ (som for $x = 0$; bemærk her at $x < a$). Dermed har vi for alle $x < 1$, at $0 \leq a < 1$, så $a \in [0,1[$. Endelig har vi, da $x < 1$, at

$$a = \frac{x+1}{2} > \frac{x+x}{2} = x,$$

altså at $x < a$. Så vi har for alle $x < 1$, at vi kan finde et $a \in [0,1[$, så $x < a$, hvilket betyder at 1 må være den mindste majorant, og vi skriver $\sup[0,1[= 1$. **QED.**

7.3.11.2

Vi skal vise, at $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Først skal vi derfor vise pr. Definition 246, at 0 er en minorant for mængden $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, og endelig at 0 er den største minorant for dette interval (altså, at hvis x er en minorant, da er $x \leq 0$).

Vi vil vise, at 0 er en minorant for mængden $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Men da vi har gældende for alle $n \in \mathbb{N}$, at $\frac{1}{n} > 0$ og ydermere, at $\frac{1}{n} \geq 0$, så er 0 en minorant for $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Vi vil derpå vise, at 0 er den største minorant for samme mængde. Til dette vil vi benytte et modstridsbevis, og antage at 0 *ikke* er den største minorant; altså at der findes en minorant h, for hvilken der gælder at $h > 0$.

Vi vælger nu et $k \in \mathbb{N}$, så $k > \frac{1}{h}$, hvilket vi kan gøre ved Arkimedes' princip. Dermed har vi da, at $\frac{1}{k} < h$, da $k > 0$ og $h > 0$.

Men da $k \in \mathbb{N}$, må der nødvendigvis gælde, at $\frac{1}{k} \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da $\frac{1}{k} < h$, kan h derpå ikke være en minorant for samme mængde, da der skal gælde at $h \leq x$ for alle $x \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, pr. Definition 228. Derpå medfører vores antagelse, at $((h \text{ minorant}) \wedge (h \text{ ikke minorant}))$, og vores antagelse må være forkert. Derfor må 0 være den største minorant for $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, og vi skriver $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$. **QED.**

2 Opgave 7.3.13

Lad A og B være ikke-tomme delmængder af den totalt ordnede mængde $\mathbb{R}$ (udstyret med den sædvanlige ordning), hvorom det gælder, at $a < b$ for alle $a \in A$ og $b \in B$.

1. Vi skal vise, at $\sup A$ og $\inf B$ begge eksisterer, og at $\sup A \leq \inf B$.

   Vi har fået oplyst, at den totalt ordnede mængde $\mathbb{R}$ (med den sædvanlige ordning) har supremumsegenskaben, altså pr. Definition 243, at *enhver* ikke-tom opadtil begrænset delmængde af denne har et supremum. Vi lod jo A være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}$. Givet et vilkårligt $b_0 \in B$, havde vi for alle $a \in A$ at $a < b_0$, og der må ydermere gælde, at $a \leq b_0$ for alle $a \in A$, så b_0 er en majorant for A pr. Definition 228. Vi har derfor at A er opadtil begrænset.

   Idet A derved er en ikke-tom opadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$, har A ved supremumsegenskaben for $\mathbb{R}$ et supremum: $\sup A$ eksisterer.

   Idet vi vidste at $\mathbb{R}$ har supremumsegenskaben, er dette ensbetydende med pr. Sætning 251 at $\mathbb{R}$ også har infimumsegenskaben, altså at *enhver* ikke-tom nedadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ har et infimum. Men vi lod B være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}$. Ved et vilkårligt givet $a_0 \in A$, havde vi, at $a_0 < b$ for alle $b \in B$ og endvidere, at $a_0 \leq b$ for alle $b \in B$, så a_0 er en minorant for B pr. Definition 228, og vi har derfor at B er nedadtil begrænset.

   Idet B så er en ikke-tom nedadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$, har B ved infimumsegenskaben for $\mathbb{R}$ et infimum: $\inf B$ eksisterer.

   Vi ved nu, at et vilkårligt $b \in B$ er majorant for A. Men da $\sup A$ er den mindste majorant for A, er $\sup A \leq b$ for alle $b \in B$, pr. Definition 235. Men så er $\sup A$ nu en minorant til B pr. Definition 228. Men da $\inf B$ er den største minorant til B, må der gælde pr. Definition 246, at $\sup A \leq \inf B$. **QED.**

2. Antag nu videre at $A \cup B = \mathbb{R}$. Vi skal vise, at $\sup A = \inf B$. Altså skal vi vise, at

$$A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow \sup A = \inf B$$

Vi vil i stedet vælge at vise det kontraponerede udsagn, altså

$$\sup A \neq \inf B \Rightarrow A \cup B \neq \mathbb{R}$$

Da vi antager $\sup A \neq \inf B$ og vi ved, at $\sup A \leq \inf B$ fra 7.3.13.1, kan vi dermed antage, at $\sup A < \inf B$. Vi skal nu vise, at $A \cup B \neq \mathbb{R}$.

Før vi går til værks med antagelsen, vil vi præcisere hvad der skal vises. Udsagnet $A \cup B \neq \mathbb{R}$ er ækvivalent med at der findes et x så $x \in \mathbb{R}$, men så $x \notin A \cup B$, pr. Definition 91. (Vi vil nemlig få, at alle $x \in A \cup B$ vil ligge i $\mathbb{R}$, da A og B er ikke-tomme delmængder af $\mathbb{R}$; $x \in A \cup B \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.) Hvis bare der findes ét x, der opfylder dette, er beviset færdigt; da vil gælde, at $A \cup B \neq \mathbb{R}$.

Lad os undersøge m givet ved

$$m = \frac{\sup A + \inf B}{2}.$$

Dette m ligger i $\mathbb{R}$, da både $\sup A$ og $\inf B$ jo ligger i $\mathbb{R}$. Da vi har antaget $\sup A < \inf B$, ved vi, at

$$m = \frac{\sup A + \inf B}{2} < \frac{\inf B + \inf B}{2} = \inf B$$

samt at

$$m = \frac{\sup A + \inf B}{2} > \frac{\sup A + \sup A}{2} = \sup A$$

Dermed har vi at $\sup A < m < \inf B$; under antagelsen at $\sup A < \inf B$ eksisterer der altså et $m \in \mathbb{R}$, så $\sup A < m < \inf B$.

Da $\sup A < m$ og $a \leq \sup A$ for alle $a \in A$, gælder at $a < m$ for alle $a \in A$. Tilsvarende da $m < \inf B$ og $\inf B \leq b$ for alle $b \in B$, gælder at $m < b$ for alle $b \in B$. Dermed kan m ikke ligge i A eller i B. Derfor, at $m \notin A$ og at $m \notin B$, hvilket medfører at $m \notin A \cup B$ pr. Definition 116. Samtidig havde vi at $m \in \mathbb{R}$.

Men vi søgte jo et element x for hvilket der gjaldt at $x \in \mathbb{R}$ og $x \notin A \cup B$, og vi har netop fundet et, som var m; dermed må gælde under vores antagelse at $\sup A < \inf B$, at $A \cup B \neq \mathbb{R}$. Men så er implikationen vist; da det kontraponerede udsagn derpå er sandt, er det oprindelige udsagn

$$A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow \sup A = \inf B$$

derfor også sandt. **QED.**