MI 2009-10

14. september 2009

Alle henvisninger er til Measure theory, hvis ikke andet er angivet.

Opgave 1

Vi definerer to mængdesystemer $\mathbb{D} = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ og $\mathbb{H} = \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ på $\mathbb{R}$. Fra opgave 1.6(d) i bogen vides, at $\mathbb{B} = \sigma(\mathbb{D})$.

Spørgsmål 1.1

Vi skal vise, at $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}^\diamond$, hvor $\mathbb{H}^\diamond$ er en forstørret udgave af $\mathbb{H}$ indeholdende alle endelige og uendelige unioner af mængder i $\mathbb{D}$ og alle komplementer til $\mathbb{D}$-mængder, jf. s. 18-19.

Induktivt defineres $H^{\diamond n} = (\mathbb{H}^{\diamond(n-1)})^\diamond$, hvor $\mathbb{H}^{\diamond 0} = \mathbb{H}$ og $\mathbb{H}^{\diamond 1} = \mathbb{H}^\diamond$.

Lad $D \in \mathbb{D}$ være givet. D er da på formen $D = (-\infty, x]$ for et $x \in \mathbb{R}$, hvorpå $D^c = (x, \infty) \in \mathbb{H}$. Derpå er $D = (D^c)^c \in \mathbb{H}^\diamond$, idet $\mathbb{H}^\diamond$ indeholder alle komplementer til elementer i $\mathbb{H}$. Dermed har vi, at $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}^\diamond$, hvilket ønskedes vist.

Vi vil nu vise, at $\sigma(\mathbb{D}) = \sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{B}$.

Da $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}^\diamond \subset \sigma(\mathbb{H})$ jf. side 19, må $\sigma(\mathbb{D}) \subset \sigma(\mathbb{H})$ jf. definition 1.17, da vi har, at $\sigma(\mathbb{H})$ er en σ-algebra, der indeholder $\mathbb{D}$, hvorpå snittet af alle σ-algebraer på $\mathbb{R}$, der indeholder $\mathbb{D}$, nemlig $\sigma(\mathbb{D})$, må være indeholdt i $\sigma(\mathbb{H})$.

Lad nu $A \in \mathbb{H}$ være givet. Da er A på formen $A = (x, \infty)$ for et $x \in \mathbb{R}$.

Vi har nu, at $A^c = (-\infty, x] \in \mathbb{D} \subset \sigma(\mathbb{D})$, jf. definition 1.17. Da $\sigma(\mathbb{D})$ er en σ-algebra, må komplementet til A^c også ligge i $\sigma(\mathbb{D})$ jf. definition 1.11; altså $A = (A^c)^c \in \sigma(\mathbb{D})$. Dermed er $\mathbb{H} \subset \sigma(\mathbb{D})$.

Vi får af dette, da $\sigma(\mathbb{H})$ er snittet af alle σ-algebraer på $\mathbb{R}$, der indeholder $\mathbb{H}$, og da $\sigma(\mathbb{D})$ er en σ-algebra på $\mathbb{R}$, der indeholder $\mathbb{H}$, at $\sigma(\mathbb{H}) \subset \sigma(\mathbb{D})$. Med foregående inklusion følger, at $\sigma(\mathbb{D}) = \sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{B}$.

Spørgsmål 1.2

Vi skal vise, at for alle $x, y \in \mathbb{R}$, som opfylder, at $x < y$, haves, at $(x, y] \in \mathbb{H}^{\diamond 3}$ og $(x, y) \in \mathbb{H}^{\diamond 4}$. Lad derfor $x, y \in \mathbb{R}$ være givet, så $x < y$. Definer nu $A = (x, \infty)$ og $B = (y, \infty)$; vi har da, at $A, B \in \mathbb{H}$.

Pr. s. 18 må $A^c, B \in \mathbb{H}^\diamond$. Videre må $A^c \cup B \in \mathbb{H}^{\diamond 2}$, og $(A^c \cup B)^c \in \mathbb{H}^{\diamond 3}$. Da $A^c \cup B = (-\infty, x] \cup (y, \infty)$, har vi, at

$$(x, y] = ((-\infty, x] \cup (y, \infty))^c = (A^c \cup B)^c \in \mathbb{H}^{\diamond 3}.$$

For alle $n \in \mathbb{N}$ definerer vi nu $C_n = (y - \frac{1}{n}, \infty)$. Vi har da for alle $n \in \mathbb{N}$, at $C_n \in \mathbb{H}$, da $y - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$.

Nu følger igen pr. s. 18, at $A^c, C_n \in \mathbb{H}^\diamond$, hvorpå $A^c \cup C_n \in \mathbb{H}^{\diamond 2}$, og $(A^c \cup C_n)^c \in \mathbb{H}^{\diamond 3}$. Da $A^c \cup C_n = (-\infty, x] \cup (y - \frac{1}{n}, \infty)$, har vi, at

$$\left(x, y - \frac{1}{n}\right] = ((-\infty, x] \cup (y - \frac{1}{n}, \infty))^c = (A^c \cup C_n)^c \in \mathbb{H}^{\diamond 3}.$$

Det kan ske, at ovenstående interval for nogle $n \in \mathbb{N}$ ikke "giver mening", hvis $y - \frac{1}{n} \leq x$ – i så fald vil intervallet blot være lig den tomme mængde.

Vi vil vise, at $(x, y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}]$.

Lad $a \in (x, y)$. Vi skal vise, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $a \in (x, y - \frac{1}{n}]$, hvorpå $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}]$ og $(x, y) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}]$.

Da $a < y$, må gælde, at $a = y - \varepsilon$ for et reelt $\varepsilon > 0$. Lad nu $N \in \mathbb{N}$ være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $N > \frac{1}{\varepsilon}$, hvilket er ladsiggørligt ved Arkimedes' princip. Da er $\varepsilon > \frac{1}{N}$ og $a = y - \varepsilon < y - \frac{1}{N}$. Da $x < a$, har vi, at $a \in (x, y - \frac{1}{N}]$. Altså findes et $n \in \mathbb{N}$, nemlig N, så $a \in (x, y - \frac{1}{n}]$.

Lad $b \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}]$. Der findes derpå et $n \in \mathbb{N}$, så $b \in (x, y - \frac{1}{n}]$. Lad n_0 opfylde dette. Da $y - \frac{1}{n_0} < y$, har vi, at $b \in (x, y - \frac{1}{n_0}] \subset (x, y)$. Dermed er $\bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}] \subset (x, y)$, og $(x, y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}]$.

Da $\mathbb{H}^{\diamond 4}$ indeholder alle tælleligt uendelige unioner af mængder i $\mathbb{H}^{\diamond 3}$, og da $(x, y - \frac{1}{n}] \in \mathbb{H}^{\diamond 3}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, må den tælleligt uendelige (da $\mathbb{N}$ er tællelig) union $\bigcup_{n=1}^{\infty} (x, y - \frac{1}{n}]$ ligge i $\mathbb{H}^{\diamond 4}$.

Da vi netop lige har vist, at ovenstående union var lig (x, y), må $(x, y) \in \mathbb{H}^{\diamond 4}$.

Opgave 2

Vi har vist, at mængdesystemerne $\mathbb{D}$ og $\mathbb{H}$ fra opgave 1 genererer Borel-algebraen $\mathbb{B}$. Lad nu μ være et mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, der opfylder for $x \in \mathbb{R}$, at

$$\mu((\infty, x]) = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}, \tag{1}$$

hvorpå vi har et målrum $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mu)$. Opgaveformuleringen fortæller, at vi kan tage for givet, at dette mål eksisterer.

Spørgsmål 2.1

Vi skal vise, at $\mathbb{D}$ fra opgave 1 er stabil under fællesmængdedannelse. Lad derfor $A, B \in \mathbb{D}$; vi skal vise, at $A \cap B \in \mathbb{D}$, jf. s. 5.

A og B er intervaller på formen $A = (-\infty, x]$ og $B = (-\infty, y]$ for $x, y \in \mathbb{R}$. Antag uden tab af generalitet, at $x < y$. Da gælder, at $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$. Derpå er $A \cap B = (-\infty, x] \cap (-\infty, y] = (-\infty, x] = A \in \mathbb{D}$. Derpå er $\mathbb{D}$ stabil under fællesmængdedannelse.

Vi skal endvidere vise, at egenskaben i (1) unikt specificerer målet μ. Lad derfor μ og μ' være to mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, der opfylder (1).

Vores hensigt er at benytte sætning 3.9. Vi ved, at $\mathbb{B} = \sigma(\mathbb{D})$, og for alle $D \in \mathbb{D}$, som netop er på formen $(-\infty, x]$ for $x \in \mathbb{R}$, gælder, idet μ og μ' netop opfylder (1), at $\mu(D) = \mu((\infty, x]) = \mu'((\infty, x]) = \mu'(D)$.

Betragt nu for alle $n \in \mathbb{N}$ intervallet $D_n = (-\infty, n]$. Da er $\mu(D_n) = e^n(1+e^{-n})^{-1} < \infty$.

Det er endvidere klart, at $D_n \in \mathbb{D} \subset \sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}$ for alle $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, og at $(-\infty, 1] \subset (-\infty, 2] \subset (-\infty, 3] \subset \cdots$, så vi har altså dannet en følge af tiltagende mængder $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots$.

Det genstår nu bare at vise, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{R}$.

Vi vil vise, at $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n] = \mathbb{R}$.

Lad $x \in \mathbb{R}$. Vi skal vise, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $x \in (-\infty, n]$, hvorpå $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n]$. Lad $N \in \mathbb{N}$ være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $N > x$, hvilket er ladsiggørligt ved Arkimedes' princip. Da er $x \in (-\infty, N]$, hvorpå vi har fundet et $n \in \mathbb{N}$, nemlig N, så $x \in (-\infty, n]$. Derfor har vi, at $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n]$.

Lad $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n]$. Der findes derpå et $n \in \mathbb{N}$, så $y \in (-\infty, n]$, men da $(-\infty, n] \subset \mathbb{R}$, gælder, at $y \in \mathbb{R}$. Derpå har vi, at $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n] \subset \mathbb{R}$, hvorpå det ønskede er vist.

Idet vi før har vist, at $\mathbb{D}$ er stabil under fællesmængdedannelse, kan vi nu benytte sætning 3.9 og konkludere, at $\mu = \mu'$, altså at alle mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ med egenskaben (1) må være det samme mål.

Spørgsmål 2.2

Vi skal vise, at $\mu(\mathbb{R}) = \infty$. Med målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mu)$ definerede vi i spørgsmål 2.1 mængderne $D_n = (-\infty, n]$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots$ og vi fandt ud af, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{R}$.

Vi har nu jf. lemma 2.6, at $\mu(D_n) \to \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \mu(\mathbb{R})$ for $n \to \infty$. Vi har derfor, at

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+e^{-n}} = \infty,$$

idet $e^n \to \infty$ og $1 + e^{-n} \to 1$, hvorpå vi benytter de sædvanlige regneregler for grænseværdier. Derpå er det ønskede vist.

Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet. Da er $\mu((-\infty, x]) < \infty$. Vi har endvidere, at $(-\infty, x] \in \mathbb{D} \subset \sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}$ jf. definition 1.17; $\mathbb{R} \in \mathbb{B}$ jf. definition 1.11, da $\mathbb{B}$ er en σ-algebra på $\mathbb{R}$. Naturligvis er $(-\infty, x] \subset \mathbb{R}$. Med lemma 2.8 får vi nu, at

$$\mu((x,\infty)) = \mu(\mathbb{R} \setminus (-\infty, x]) = \mu(\mathbb{R}) - \mu((-\infty, x]) = -\mu((-\infty, x]) + \infty = \infty.$$

Altså er $\mu((x,\infty)) = \infty$ for alle $x \in \mathbb{R}$; mere direkte er $\mu(H) = \infty$ for alle $H \in \mathbb{H}$.

Vi skal vise, at $\mathbb{H}$ fra opgave 1 er stabil under fællesmængdedannelse.

Lad derfor $A, B \in \mathbb{H}$; vi skal vise, at $A \cap B \in \mathbb{H}$. A og B er intervaller på formen $A = (x, \infty)$ og $B = (y, \infty)$ for $x, y \in \mathbb{R}$. Antag uden tab af generalitet, at $y > x$. Da gælder, at $(y, \infty) \subset (x, \infty)$. Derpå er $A \cap B = (x, \infty) \cap (y, \infty) = (y, \infty) = B \in \mathbb{H}$.

$\mathbb{H}$ er da stabil under fællesmængdedannelse.

Vi skal nu argumentere for, at μ ikke er unikt specificeret af sine værdier på $\mathbb{H}$. Vi har netop fundet, at $\mu(H) = \infty$ for alle $H \in \mathbb{H}$, og altså kan vi ikke benytte sætning 3.9 som vi kunne i forrige opgave, da vi ikke kan danne en følge af mængder på $\mathbb{H}$, så målet af disse vil være mindre end ∞. Man kunne nemlig have håbet på, at man kunne snitte sig ned til en mængde i $\mathbb{H}$ med endeligt mål, men vi har også netop fundet, at $\mathbb{H}$ var stabil under fællesmængdedannelse (med mængdedifferenser ville vi endda kunne opnå målet $\infty - \infty$, hvilket jo ikke giver mening).

Om end vi støder på dette problem, er det dog ikke nok til at sige, at μ ikke er unikt givet ved sine værdier på $\mathbb{H}$. Lad os derfor definere et nyt mål på $\mathbb{B}$, ν:

$$\nu(B) = \begin{cases} 0 & \text{for } B = \emptyset \\ \infty & \text{for } B \neq \emptyset \end{cases}$$

for alle $B \in \mathbb{B}$. Dette **er** et mål (om end et dumt et), jf. s. 32. Lad $H \in \mathbb{H}$ være givet. Da er $H \neq \emptyset$ og $H \in \mathbb{H} \subset \sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{B}$, og $\mu(H) = \infty = \nu(H)$. Altså er $\mu(H) = \nu(H)$ for alle $H \in \mathbb{H}$.

Dermed er μ ikke unikt givet ved sine værdier på $\mathbb{H}$, idet vi har fundet et mål $\nu \neq \mu$, der giver samme værdier på $\mathbb{H}$ som μ.

Spørgsmål 2.3

Lad $x \in \mathbb{R}$ og $\varepsilon > 0$ være givet – da giver intervallet $(x, x+\varepsilon]$ mening, og vi skal bestemme $\mu((x, x+\varepsilon])$. Vi definerer nu $A = (-\infty, x]$ og $B = (-\infty, x+\varepsilon]$, og vi ser, at $B \setminus A = (x, x+\varepsilon]$. Vi har, at $A, B \in \mathbb{D} \subset \sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}$, samt at $A \subset B$. Da $\mu(A) < \infty$, får vi med lemma 2.8, at

$$\begin{aligned} \mu((x, x+\varepsilon]) &= \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \mu((-\infty, x+\varepsilon]) - \mu((-\infty, x]) \\ &= \frac{e^{x+\varepsilon}}{1+e^{-(x+\varepsilon)}} - \frac{e^x}{1+e^{-x}}. \end{aligned}$$

Vi har dermed bestemt $\mu((x, x+\varepsilon])$.

Lad $x \in \mathbb{R}$ og $\varepsilon \in (0,1]$ være givet. Vi skal vise, at $\mu((x, x+\varepsilon]) \leq K\varepsilon(e^x+1)$ for en konstant $K > 0$. Opgaveformuleringen fortæller, at man uden argumentation kan benytte, at $e^\varepsilon - e^{-\varepsilon} \leq K\varepsilon$ for $\varepsilon \in [0,1]$ for en konstant $K > 0$.

Vi får da følgende:

$$\begin{aligned} \mu((x, x+\varepsilon]) &= \frac{e^{x+\varepsilon}}{1+e^{-(x+\varepsilon)}} - \frac{e^x}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{e^{x+\varepsilon}(1+e^{-x}) - e^x(1+e^{-(x+\varepsilon)})}{(1+e^{-x})(1+e^{-(x+\varepsilon)})} \\ &\overset{1}{\leq} e^{x+\varepsilon}(1+e^{-x}) - e^x(1+e^{-(x+\varepsilon)}) \\ &= e^{x+\varepsilon} - e^x + e^\varepsilon - e^{-\varepsilon} \\ &\overset{2}{\leq} e^{x+\varepsilon} - e^{x-\varepsilon} + e^\varepsilon - e^{-\varepsilon} \\ &= (e^\varepsilon - e^{-\varepsilon})(e^x+1) \\ &\overset{3}{\leq} K\varepsilon(e^x+1). \end{aligned}$$

1: Da $(1+e^{-x})(1+e^{-(x+\varepsilon)}) = 1 + e^{-x} + e^{-(x+\varepsilon)} + e^{-(2x+\varepsilon)} \geq 1$, da $e^y \geq 0$ for alle $y \in \mathbb{R}$; da er $((1+e^{-x})(1+e^{-(x+\varepsilon)}))^{-1} \leq 1$.

2: Da $e^x \geq e^{x-\varepsilon}$, er $-e^x \leq -e^{x-\varepsilon}$.

3: For en konstant $K > 0$ og et $\varepsilon \in [0,1]$ jf. opgaveformuleringen. Da $\varepsilon \in (0,1] \subset [0,1]$, er dette opfyldt.

Dermed gælder ovenstående for $\varepsilon \in (0,1]$ og $x \in \mathbb{R}$, samt for en eller anden konstant $K > 0$ (som vælges, så uligheden $e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon} \leq K\varepsilon$ er opfyldt).

Spørgsmål 2.4

Vi definerer nu $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+e^{-2n}]$. Vi skal vise, at $A \in \mathbb{B}$.

For alle $n \in \mathbb{N}$ kan vi definere $A_n = (n, n+e^{-2n}]$.

$(-\infty, n+e^{-2n}]$ og $(\infty, n]$ er indeholdt i $\mathbb{D}$ og dermed også i $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}$. Da har vi, at $A_n = (-\infty, n+e^{-2n}] \setminus (\infty, n] \in \mathbb{B}$, idet $\mathbb{B}$, da denne er en σ-algebra, er stabil under mængdedifferenser, jf. lemmaer 1.12 og 1.9.

Men idet $\mathbb{B}$ er en σ-algebra, og $A_n \in \mathbb{B}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, følger det af definition 1.11, at $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+e^{-2n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{B}$. Dermed er det ønskede vist.

Vi skal dertil afgøre, om $\mu(A) = \infty$ eller om $\mu(A) < \infty$. Idet vi har defineret A som ovenfor, vil det være oplagt at benytte Booles ulighed, lemma 2.7, med vores følge af mængder $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (idet vi ved, at $A_n \in \mathbb{B}$ for alle $n \in \mathbb{N}$):

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((n, n+e^{-2n}]).$$

Lad nu $n \in \mathbb{N}$ være givet og sæt $\varepsilon = e^{-2n}$. Da er $\varepsilon > 0$ og $\varepsilon = e^{-2n} \leq e_0 = 1$. Fra spørgsmål 2.3 får vi nu, at

$$\mu((n, n+e^{-2n}]) \leq K\varepsilon(e^n + 1) = Ke^{-2n}(e^n+1) = K(e^{-1})^n + K(e^{-2})^n \tag{2}$$

for en konstant $0 < K < \infty$.

Lad os undersøge rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} K(e^{-1})^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} K(e^{-2})^n$. Disse er geometriske rækker, og de er konvergente jf. Kalkulus sætning 12.1.1, idet vi har for kvotienterne e^{-1} og e^{-2}, at $0 < e^{-2} < e^{-1} < e^0 = 1$, da exp er voksende. Da er rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} K(e^{-1})^n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} K(e^{-2})^n$ også konvergente jf. Kalkulus sætning 12.1.9.

Dermed er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(K(e^{-1})^n + K(e^{-2})^n)$ også en konvergent række jf. Kalkulus sætning 12.1.7. Men da har vi netop jf. Kalkulus sætning 12.2.6(i), idet (2) gælder for alle $n \in \mathbb{N}$ og rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(K(e^{-1})^n + K(e^{-2})^n)$ er konvergent, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \mu((n, n+e^{-2n}])$ er konvergent.

Dermed er $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((n, n+e^{-2n}]) < \infty$.

Opgave 3

Vi går nu over til målrummet $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2, m_2)$, og definerer

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ 0 < y \leq 1 - x^2\}.$$

Spørgsmål 3.1

En skitse af A er vedlagt som bilag. Vi definerer nu

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ n^{-1} \leq y \leq 1 - x^2\},$$

og vil vise, at $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$: Lad $a \in A$. Da er a på formen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, hvor $x_0 \geq 0$ og $0 < y_0 \leq 1 - x_0^2$. Da $y_0 > 0$, kan vi jf. Arkimedes' princip sætte $n_1 \in \mathbb{N}$ til at være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $n_1 > \frac{1}{y_0} > 0$. Dermed er $y_0 > \frac{1}{n_1}$. Dermed gælder specielt, at $y_0 \geq \frac{1}{n_1}$.

Da vi derfor alt i alt har, at $x_0 \geq 0$ og $\frac{1}{n_1} \leq y_0 \leq 1 - x_0^2$, må $a \in A_{n_1}$, og derfor $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$A \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$: Lad $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Det vil sige, at der findes $n_2 \in \mathbb{N}$, så $a \in A_{n_2}$. Da er a på formen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, hvor $x_0 \geq 0$ og $n_2^{-1} \leq y_0 \leq 1 - x_0^2$. Da $n_2^{-1} > 0$, har vi derfor, at $x_0 \geq 0$ og $0 < n_2^{-1} \leq y_0 \leq 1 - x_0^2$. Da må $a \in A$.

Dermed er $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Vi vil slutteligt vise, at $A \in \mathbb{B}_2$. Vi definerer derfor følgende tre mængder:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \\
G_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \\
G_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1 - x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x^2 \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Vi ser, at $A = G_1 \cap G_2 \cap G_3$.

Vi definerer dertil afbildningerne $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y$ og $f_3(x, y) = y + x^2$. Disse afbildninger er kontinuerte, da de kan konstrueres ved projektionsafbildninger (som er kontinuerte, jf. slide 17, 6. september 2009), regneoperationerne $+$ og $\cdot$ på disse (som også er kontinuerte, jf. samme slide) og sammensætning af kontinuerte afbildninger (som giver en ny kontinuert afbildning).

Nu gælder jf. Metriske rum sætning 3.2, at $f_2^{-1}((0, \infty))$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$, da $(0, \infty)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}$ (lad nemlig $x \in (0, \infty)$; da vil kuglen $K(x, x) \subset (0, \infty)$, hvorpå x er indre punkt i $(0, \infty)$).

Endvidere gælder jf. Metriske rum sætning 3.3, at $f_1^{-1}([0, \infty))$ og $f_3^{-1}((\infty, 1])$ er afsluttede delmængder af $\mathbb{R}^2$, da $[0, \infty)$ og $(\infty, 1]$ er afsluttede delmængder af $\mathbb{R}$ (betragt nemlig delmængdernes komplementer i $\mathbb{R}$, $(-\infty, 0)$ og $(1, \infty)$); lad $x \in (-\infty, 0)$ og $y \in (1, \infty)$; da vil kuglerne $K(x, |x|) \subset (-\infty, 0)$ og $K(x, x-1) \subset (1, \infty)$, hvorpå x og y er indre punkter; ved dualitet er delmængderne da afsluttede).

Det ses nu, at $f_1^{-1}([0, \infty)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} = G_1$, samt at $G_2 = f_2^{-1}((0, \infty))$ og $G_3 = f_3^{-1}((\infty, 1])$.

Da G_1 og G_3 er afsluttede, er komplementerne til G_1 og G_3 åbne delmængder af $\mathbb{R}^2$, og vi har derfor, at $G_1^c \in \mathbb{O}_2 \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2$, samt at $G_3^c \in \mathbb{O} \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2$, jf. definition 1.23. Da $\mathbb{B}_2$ er en σ-algebra jf. definition 1.23, er komplementet fra $\mathbb{R}^2$ til ethvert element i $\mathbb{B}_2$ selv i $\mathbb{B}_2$, jf. definition 1.11. Altså har vi, da $(G_1^c)^c = G_1$ og $(G_3^c)^c = G_3$, at $G_1, G_3 \in \mathbb{B}_2$. Endvidere har vi, da G_2 er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$, at $G_2 \in \mathbb{O}_2 \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2$.

Da $\mathbb{B}_2$ er stabil under fællesmængdedannelse (lemmaer 1.12 og 1.8), har vi endelig, at $A = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \in \mathbb{B}_2$.

Spørgsmål 3.2

Vi definerer nu den lukkede boks $B_1 = [0,1] \times [0,1]$.

Idet vi definerer $V_n = (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \times (-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, ser vi, at $V_n \in \mathbb{I}^2 \subset \sigma(\mathbb{I}^2) \subset \mathbb{B}_2$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved s. 21 og sætning 1.24, hvorpå $B_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathbb{B}_2$ jf. sætning 1.13. Da er B_1 Borel-målelig.

Da vi har jf. s. 45, at en afsluttet boks har samme Lebesgue-mål som den tilsvarende åbne boks (med samme endepunkter), har vi jf. definition 2.20, at

$$m_2(B_1) = m_2((0,1) \times (0,1)) = (1-0)(1-0) = 1.$$

Vi skal nu vise, at $m_2(A) \leq 1$, og vil derfor vise, at $A \subset B_1$.

Lad derfor $a \in A$ være givet.

Da er a på formen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, hvor $x_0 \geq 0$ og $0 < y_0 \leq 1 - x_0^2$.

Antag for modstrid, at $x_0 \geq 1$. Da er $x_0^2 \geq 1$, hvorpå vi har, at $y_0 > 0$, men også at $y_0 \leq 1 - x_0^2 \leq 0$, hvilket er en modstrid. Altså er $0 \leq x_0 < 1$. Da vi har, at $0 \leq x_0 < 1$, må $0 \leq x_0^2 < 1$, og vi har derfor, at $0 < y_0 < 1 - x_0^2 \leq 1$.

Altså har vi, at $a = (x_0, y_0) \in [0,1) \times (0,1] \subset [0,1] \times [0,1] = B_1$.

Altså er $A \subset B_1$.

Vi kan nu, da vi er i målrummet $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2, m_2)$, benytte monotoniciteten (lemma 2.5) for m_2, idet $A \subset B_1$ og $A, B_1 \subset \mathbb{B}_2$; da er $m_2(A) \leq m_2(B_1) = 1$.

Spørgsmål 3.3

Vi definerer nu for alle $n \in \mathbb{N}$ og $k = 0, \ldots, n-1$ mængderne

$$B_{n,k} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[0, 1 - \frac{k^2}{n^2}\right]$$

og

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} B_{n,k}.$$

Vi skal argumentere for, at $B_n \in \mathbb{B}_2$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Lad derfor $n \in \mathbb{N}$ og $k = 0, \ldots, n-1$ være givet, og definer for alle $m \in \mathbb{N}$ følgende åbne boks:

$$B_{n,k,m} = \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{m}, \frac{k+1}{n} + \frac{1}{m}\right) \times \left(-\frac{1}{m}, 1 - \frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{m}\right)$$

Det fremgår for alle $m \in \mathbb{N}$, at $B_{n,k,m} \in \mathbb{I}^2 \subset \sigma(\mathbb{I}^2) = \mathbb{B}_2$ jf. s. 21 og sætning 1.24. Da $\mathbb{B}_2$ er en σ-algebra jf. definition 1.23, følger ved sætning 1.13, idet vi arbejder i det målelige rum $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ og benytter den tællelige mængde $\mathbb{N}$, at $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{n,k,m} \in \mathbb{B}_2$.

Vi har derpå, at $B_{n,k} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[0, 1 - \frac{k^2}{n^2}\right] = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{n,k,m} \in \mathbb{B}_2$. Vi har altså for alle $k = 0, \ldots, n-1$, at $B_{n,k} \in \mathbb{B}_2$. Med den tællelige, endelige indeksmængde $I = \{0, \ldots, n-1\}$ (jf. eksempel B.2) og det målelige rum $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ får vi jf. sætning 1.13, at $B_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} B_{n,k} \in \mathbb{B}_2$, hvilket var, hvad ønskedes vist.

Vi skal nu vise, at $m_2(B_n) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Idet vi sætter $B_{n,k} = \emptyset$ for $k \geq n$, er $\bigcup_{k=0}^{n-1} B_{n,k} = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{n,k}$. Pr. definition og Booles ulighed (lemma 2.7) har vi, at

$$m_2(B_n) = m_2\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} B_{n,k}\right) = m_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_{n,k}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m_2(B_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} m_2(B_{n,k}),$$

da $m_2(B_{n,k}) = m_2(\emptyset) = 0$ for $k \geq n$, jf. definition 2.3.

Da en afsluttet boks har samme Lebesgue-mål som den tilsvarende åbne boks jf. s. 45, er

$$m_2(B_{n,k}) = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}$$

jf. definition 2.20.

Opgaveformuleringen fortæller, at vi kan benytte formlen

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

uden bevis. Vi har med dette og da $n \neq 0$, at

$$\begin{aligned} m_2(B_n) \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_2(B_{n,k}) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\ &= \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} \\ &= \quad \frac{n}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \quad 1 - \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \\ &= \quad 1 - \frac{2n^3}{6n^3} + \frac{3n^2}{6n^3} - \frac{n}{6n^3} \\ &= \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \quad = \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}, \end{aligned}$$

og dermed det ønskede.

Spørgsmål 3.4

Vi skal nu vise, at $A \subset B_n$ for alle n, og at $m_2(A) \leq \frac{2}{3}$.

Lad derfor $n \in \mathbb{N}$ og $a \in A$ være givet. Da er a på formen $a = (x_0, y_0)$, hvor $x_0 \geq 0$ og $0 < y_0 \leq 1 - x_0^2$.

Da vi har, at $[0,1) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, og fandt ud af i spørgsmål 3.2, at $x_0 \in [0,1)$, må $x_0 \in \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, hvorpå der findes et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, så $x_0 \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$; lad fremover k opfylde dette.

Med dette k har vi altså, at $0 \leq \frac{k}{n} \leq x_0 \leq \frac{k+1}{n}$, hvorpå $\frac{k^2}{n^2} \leq x_0^2$. Da $a \in A$, er $y_0 \leq 1 - x_0^2 \leq 1 - \frac{k^2}{n^2}$, og $y_0 > 0$. Altså har vi, at $\frac{k}{n} \leq x_0 < \frac{k+1}{n}$ og $0 < y_0 \leq 1 - \frac{k^2}{n^2}$.

Vi har derfor, at $a \in B_{n,k}$, og slutter, at $a \in \bigcup_{k=0}^{n-1} B_{n,k} = B_n$. Derpå er $A \subset B_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, da vi lod n være givet.

Lad nu $n \in \mathbb{N}$ være givet. Vi fandt i 3.1, at $A \in \mathbb{B}_2$, og i 3.3, at $B_n \in \mathbb{B}_2$. Da $A \subset B_n$, får vi med lemma 2.5, at $m_2(A) \leq m_2(B_n) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$. Altså er $m_2(A) \leq m_2(B_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Antag for modstrid, at $m_2(A) > \frac{2}{3}$. Da findes et $\varepsilon > 0$, så $m_2(A) = \frac{2}{3} + \varepsilon$. Lad $N \in \mathbb{N}$ være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $N > \frac{1}{2\varepsilon}$, hvilket er muligt ved Arkimedes' princip. Da er $\varepsilon > \frac{1}{2N} > 0$. Ved at undersøge målet for B_N, får vi, at

$$m_2(B_N) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2N} - \frac{1}{6N^2} < \frac{2}{3} + \frac{1}{2N} < \frac{2}{3} + \varepsilon = m_2(A),$$

hvilket er en modstrid, da vi jo havde, at $m_2(A) \leq m_2(B_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er $m_2(A) \leq \frac{2}{3}$.

Spørgsmål 3.5

Vi skal nu direkte vise, at $m_2(A) = \frac{2}{3}$. Vi definerer derfor for alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ og $k = 0, \ldots, n-2$ mængderne

$$C_{n,k} = \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \times \left(0, 1 - \frac{(k+1)^2}{n^2} \right)$$

og

$$C_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} C_{n,k}.$$

Lad $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ og $k = 0, \ldots, n-2$ være givet. Vi har jf. s. 21 og sætning 1.24, at $C_{n,k} \in \mathbb{I}^2 \subset \sigma(\mathbb{I}^2) \subset \mathbb{B}_2$ for alle $k = 0, \ldots, n-2$, hvorpå $C_n \in \mathbb{B}_2$ jf. sætning 1.13 med den tællelige, endelige indeksmængde $I = \{0, \ldots, n-2\}$ (jf. eksempel B.2) og det målelige rum $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$.

Definer $C_1 = \emptyset$. Da $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{B}_2$, er $C_1 = \emptyset = (\mathbb{R}^2)^c \in \mathbb{B}_2$ jf. definition 1.11.

Lad $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ være givet. Der gælder, at $C_{n,i} \cap C_{n,j} = \emptyset$ for $i, j \in \{0, \ldots, n-2\}$ og $i \neq j$. Antag nemlig for modstrid, at $C_{n,i} \cap C_{n,j} \neq \emptyset$ for to $i, j \in \{0, \ldots, n-2\}$, hvor $i \neq j$ – antag hermed uden tab af generalitet, at $i < j$. Da findes et $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, så $a \in C_{n,i}$ og $a \in C_{n,j}$. Mere specielt betyder dette, at $x_0 \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ og $x_0 \in \left(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, men dette er en modstrid, da $i + 1 \leq j$, hvorpå $x_0 < \frac{i+1}{n} \leq \frac{j}{n}$ og $x_0 > \frac{j}{n}$.

Lad $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ være givet. Vi kan nu benytte σ-additiviteten for målet m_2 jf. definition 2.3 på mængderne $C_{n,k}$. Sætter vi nemlig $C_{n,k} = \emptyset$ for $k \geq n-1$, har vi, at

$$m_2(C_n) = m_2\left(\bigcup_{k=0}^{n-2} C_{n,k} \right) = m_2\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} m_2(C_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-2} m_2(C_{n,k}),$$

idet $m_2(\emptyset) = 0$ jf. definition 2.3. Lader vi $k = 0, \ldots, n-2$ være givet, får vi med definition 2.20, at

$$m_2(C_{n,k}) = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \frac{(k+1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{(k+1)^2}{n^3}.$$

Idet vi igen benytter formlen fra spørgsmål 3.3 og $n \neq 0$, får vi, at

$$\begin{aligned}
m_2(C_n) &= \sum_{k=0}^{n-2} m_2(C_{n,k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{n} - \frac{(k+1)^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(k+1)^2}{n^3} \\
&= \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2 \\
&= \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 \\
&= \frac{6n^3-6n^2}{6n^3} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 \\
&= \frac{6n^3-6n^2}{6n^3} - \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \\
&= \frac{4n^3-3n^2+n}{6n^3} \quad = \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Vi viser nu, at $C_n \subset A$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Hvis $n = 1$, er $C_1 = \emptyset \in A$. Lad derfor $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ være givet. Lad $a \in C_n$.

Da opfylder $a = (x_0, y_0)$, at $a \in \bigcup_{k=0}^{n-2} C_{n,k}$, dvs. der findes et $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, så $a \in C_{n,k}$. Dette betyder, at $x_0 \in (\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ og at $y_0 \in (0, 1 - \frac{(k+1)^2}{n^2})$.

Altså gælder, at $x_0 \geq 0$, og at $0 < y_0 < 1 - \frac{(k+1)^2}{n^2} < 1 - x_0^2$, idet $x_0 < \frac{k+1}{n}$.

Vi får heraf, at $a \in A$, og dermed er $C_n \subset A$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Da $C_n, A \in \mathbb{B}_2$ og $C_n \subset A$ for alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, får vi ved lemma 2.5, at $\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} = m_2(C_n) \leq m_2(A)$. Vi har desuden, at $m_2(C_1) = m_2(\emptyset) = 0 \leq m_2(A)$, da alle mål er ikke-negative, jf. definition 2.3. Altså er $m_2(C_n) \leq m_2(A)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi vil vise, at $m_2(A) \geq \frac{2}{3}$. Antag for modstrid, at $0 \leq m_2(A) < \frac{2}{3}$. Da findes et $\varepsilon \in (0, \frac{2}{3}]$, så $m_2(A) = \frac{2}{3} - \varepsilon$. Lad $N \in \mathbb{N}$ være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $N > \frac{1}{\varepsilon}$, hvilket er muligt ved Arkimedes' princip. Da $6N^2 > 6N > 2N$, er $\frac{1}{2N} > \frac{1}{6N^2}$.

Vi har nu, at $\varepsilon > \frac{1}{N} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2} > 0$.

Ved at undersøge målet for C_N, får vi, at

$$m_2(C_N) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{6N^2} > \frac{2}{3} - \frac{1}{N} > \frac{2}{3} - \varepsilon = m_2(A),$$

hvilket er en modstrid, da vi jo havde, at $m_2(C_n) \leq m_2(A)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er $m_2(A) \geq \frac{2}{3}$.

Da vi fandt i spørgsmål 3.4, at $m_2(A) \leq \frac{2}{3}$, må der altså gælde, at $m_2(A) = \frac{2}{3}$.

Spørgsmål 3.6

Vi skal nu bestemme $m_2(\bar{A})$ og $m_2(A^\circ)$.

Lad $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $k_1 = 0, \ldots, n_1 - 1$ og $k_2 = 0, \ldots, n_2 - 2$ være givet. Vi definerer fire mængder

$$\begin{aligned}
G_{1,n_1,k_1} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[\frac{k_1}{n_1}, \frac{k_1+1}{n_1}\right]\right\} \\
G_{2,n_1,k_1} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \left[0, 1 - \frac{k_1^2}{n_1^2}\right]\right\} \\
G_{3,n_2,k_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(\frac{k_2}{n_2}, \frac{k_2+1}{n_2}\right)\right\} \\
G_{4,n_2,k_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \left(0, 1 - \frac{(k_2+1)^2}{n_2^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Da projektionsafbildningerne $f_1(x,y) = x$ og $f_2(x,y) = y$ er kontinuerte (jf. slide 17, 6. september 2009), er urbillederne $f_1^{-1}([\frac{k_1}{n_1}, \frac{k_1+1}{n_1}]) = G_{1,n_1,k_1}$ og $f_2^{-1}([0, 1 - \frac{k_1^2}{n_1^2}]) = G_{2,n_1,k_1}$ afsluttede delmængder af $\mathbb{R}^2$ jf. Metriske rum sætning 3.3, idet $[\frac{k_1}{n_1}, \frac{k_1+1}{n_1}]$ og $[0, 1 - \frac{k_1^2}{n_1^2}]$ er afsluttede delmængder af $\mathbb{R}$.

Tilsvarende er urbillederne $f_1^{-1}((\frac{k_2}{n_2}, \frac{k_2+1}{n_2})) = G_{3,n_2,k_2}$ og $f_2^{-1}((0, 1 - \frac{(k_2+1)^2}{n_2^2})) = G_{4,n_2,k_2}$ åbne delmængder af $\mathbb{R}^2$ jf. Metriske rum sætning 3.2, idet $(\frac{k_2}{n_2}, \frac{k_2+1}{n_2})$ og $(0, 1 - \frac{(k_2+1)^2}{n_2^2})$ er åbne delmængder af $\mathbb{R}$.

Ved Metriske rum sætning 2.6(ii) og 2.7(iii) får vi derpå, at $C_{n_2,k_2} = G_{3,n_2,k_2} \cap G_{4,n_2,k_2}$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ for alle $k = 0, \ldots, n_2 - 2$ og at $B_{n_1,k_1} = G_{1,n_1,k_1} \cap G_{2,n_1,k_1}$ er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$ for alle $k = 0, \ldots, n_1 - 1$.

Ved Metriske rum sætning 2.6(iii) og 2.7(ii) får vi så, at $C_{n_2} = \bigcup_{k_2=0}^{n_2-1} C_{n,k_2}$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ for alle $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ og at $B_{n_1} = \bigcup_{k_1=0}^{n_1-1} B_{n_1,k_1}$ er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$ for alle $n_1 \in \mathbb{N}$.

Vi husker, at $C_1 = \emptyset$. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Idet C_n er åben og $C_n \subset A$, samt at B_n er afsluttet og $A \subset B_n$, får vi så med Metriske rum sætning 2.8, at $C_n \subset A^\circ$ og $\bar{A} \subset B_n$.

Vi ved, at A° er en åben mængde i $\mathbb{R}^2$, så $A^\circ \in \mathbb{O}_2 \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2$, jf. definition 1.23. Samtidig ved vi også, at $\bar{A}$ er afsluttet, så dens komplement er åbent, så $(\bar{A})^c \in \mathbb{O}_2 \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2$. Da $\mathbb{B}_2$ er en σ-algebra, får vi jf. definition 1.11, at $\bar{A} \in \mathbb{B}_2$. Sluttende ved vi naturligvis, at $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$.

Med lemma 2.5 og fra spørgsmål 3.4 og 3.5 får vi da, at

$$m_2(C_n) \leq m_2(A^\circ) \leq m_2(A) \leq m_2(\bar{A}) \leq m_2(B_n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi kommer nu igennem præcis samme territorium som i slutningen af både spørgsmål 3.4 og 3.5: vi kan nu, grundet ovenstående kæde af uligheder, med samme modstridsbevis som i 3.4 vise, at $m_2(\bar{A}) \leq \frac{2}{3}$, hvis vi blot erstatter A i beviset med $\bar{A}$, og tilsvarende kan vi vise med samme modstridsbevis som i 3.5, at $m_2(A^\circ) \geq \frac{2}{3}$, hvis vi erstatter A i beviset med A°. For god ordens skyld gøres dette:

> Antag for modstrid, at $m_2(\bar{A}) > \frac{2}{3}$. Da findes et $\varepsilon > 0$, så $m_2(\bar{A}) = \frac{2}{3} + \varepsilon$. Lad $N \in \mathbb{N}$ være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $N > \frac{1}{2\varepsilon}$, hvilket er muligt ved Arkimedes' princip. Da er $\varepsilon > \frac{1}{2N} > 0$. Ved at undersøge målet for B_N, får vi, at
>
> $$m_2(B_N) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2N} - \frac{1}{6N^2} < \frac{2}{3} + \frac{1}{2N} < \frac{2}{3} + \varepsilon = m_2(\bar{A}),$$
>
> hvilket er en modstrid, da vi jo har, at $m_2(\bar{A}) \leq m_2(B_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er $m_2(\bar{A}) \leq \frac{2}{3}$.
>
> Vi vil også vise, at $m_2(A^\circ) \geq \frac{2}{3}$. Antag for modstrid, at $m_2(A^\circ) < \frac{2}{3}$. Da findes et $\varepsilon > 0$, så $m_2(A^\circ) = \frac{2}{3} - \varepsilon$. Lad $N \in \mathbb{N}$ være det mindste naturlige tal, der opfylder, at $N > \frac{1}{\varepsilon}$, hvilket er muligt ved Arkimedes' princip. Da $6N^2 > 6N > 2N$, er $\frac{1}{2N} > \frac{1}{6N^2}$.
>
> Vi har nu, at $\varepsilon > \frac{1}{N} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2} > 0$.
>
> Ved at undersøge målet for C_N, får vi, at
>
> $$m_2(C_N) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{6N^2} > \frac{2}{3} - \frac{1}{2N} > \frac{2}{3} - \frac{1}{N} > \frac{2}{3} - \varepsilon = m_2(A^\circ),$$
>
> hvilket er en modstrid, da vi jo har, at $m_2(C_n) \leq m_2(A^\circ)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
>
> Dermed er $m_2(A^\circ) \geq \frac{2}{3}$.

Da vi så får, at $m_2(A^\circ) \geq \frac{2}{3}$ og $m_2(A^\circ) \leq m_2(A) = \frac{2}{3}$, er $m_2(A^\circ) = \frac{2}{3}$.

Tilsvarende da $m_2(\bar{A}) \leq \frac{2}{3}$ og $m_2(\bar{A}) \geq m_2(A) = \frac{2}{3}$, er $m_2(\bar{A}) = \frac{2}{3}$.