MI 2009-10

28. september 2009

Alle henvisninger er til Measure theory, hvis ikke andet er angivet. I delopgave 2-5 arbejdes med målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ uden at det bliver nævnt eksplicit.

Opgave 1

Lad $(\mathcal{X}, \mathbb{E})$ være et måleligt rum. I det følgende definerer vi $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathbb{E})$, $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(\mathcal{X}, \mathbb{E})$ og $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}^+(\mathcal{X}, \mathbb{E})$ jf. definition 5.1, 5.7 og 5.13.

Q1.1

Lad $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $H(x, y) = (x + y, x \cdot y)$ for $x, y \in \mathbb{R}$. Der skal argumenteres for, at H er $\mathbb{B}_2$-$\mathbb{B}_2$-målelig.

Vi har ved eksempel 4.10, at afbildningerne $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x + y$ og $g(x, y) = x \cdot y$ er $\mathbb{B}_2$-$\mathbb{B}$-målelige. Forudsætningerne for sætning 4.24 er opfyldt med de målelige rum $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ og $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, samt $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, hvor $H = (f, g)$. Da f og g begge er $\mathbb{B}_2$-$\mathbb{B}$-målelige, er H $\mathbb{B}_2$-$\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$-målelig, dvs. $\mathbb{B}_2$-$\mathbb{B}_2$-målelig jf. sætning 4.23.

Antag $f, g \in \mathcal{M}$.

Vi skal vise, at $G : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^2$ givet ved $G(x) = (f(x) + g(x), f(x)g(x))$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}_2$-målelig. Ved lemma 5.3 gælder, at $f + g \in \mathcal{M}$ og $fg \in \mathcal{M}$, så $f + g, fg$ er afbildninger fra $\mathcal{X}$ ind i $\mathbb{R}$. Pr. definition 5.1 er $f + g$ og fg $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}$-målelige. Da er $G = (f + g, fg)$. Forudsætningerne for at bruge sætning 4.24 er igen opfyldt, med målrummene $(\mathcal{X}, \mathbb{E})$ og $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Da $f + g$ og fg begge er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}$-målelige, er G $\mathbb{E}$-$\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$-målelig, dvs. $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}_2$-målelig jf. sætning 4.23.

Q1.2

Lad $f, g \in \mathcal{M}$ med $f(x) \neq 0$ og $g(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathcal{X}$. Vi skal vise, at afbildningen

$$x \mapsto \frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)}$$

også er i $\mathcal{M}$.

Pr. lemma 5.3, har vi, at $f + g \in \mathcal{M}$ og $fg \in \mathcal{M}$, så $f + g, fg$ er afbildninger fra $\mathcal{X}$ ind i $\mathbb{R}$. Definer $h_1 := f + g$ og $h_2 := fg$. Da $f(x) \neq 0$ og $g(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathcal{X}$, må gælde, at produktfunktionen $h_2(x) = f(x)g(x)$ aldrig er lig 0 for alle $x \in \mathcal{X}$ (da nulreglen kontraponeret gælder i $\mathbb{R}$). Da $h_1, h_2 \in \mathcal{M}$ og $h_2(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathcal{X}$, er $\frac{h_1}{h_2} \in \mathcal{M}$ jf. lemma 5.3, dvs. at $\frac{f+g}{fg} \in \mathcal{M}$.

Q1.3

Antag nu, at $f, g \in \mathcal{M}$, at μ er et mål på $(\mathcal{X}, \mathbb{E})$ og der findes konstanter $a, b, c, d \in (0, \infty)$, så $a \leq f(x) \leq b$ og $c \leq g(x) \leq d$ for alle $x \in \mathcal{X}$ (lad a, b, c, d være fire sådanne konstanter). Vi arbejder således i målrummet $(\mathcal{X}, \mathbb{E}, \mu)$. Vi skal vise, at

$$\frac{a+c}{bd}\mu(\mathcal{X}) \leq \int \frac{f+g}{fg} \mathrm{d}\mu \leq \frac{b+d}{ac}\mu(\mathcal{X}).$$

Vi definerer $b_1, b_2, b_3 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, så $b_1(x) = \frac{a+c}{bd}$,

$$b_2(x) = \frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)}$$

og $b_3(x) = \frac{b+d}{ac}$ (altså er $b_2 = (f+g)/(fg)$, hvorpå $b_2 \in \mathcal{M}$ jf. Q1.2). Lad $x \in \mathcal{X}$ være givet. Vi har da først, at $a + c \leq f(x) + g(x) \leq b + d$, samt at $bd \geq f(x)g(x) \geq ac$. Vi får dermed, at

$$\frac{a+c}{bd} \leq \frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)} \leq \frac{b+d}{ac}.$$

Da $a, b, c, d \in (0, \infty)$, er $\frac{a+c}{bd} \geq 0$; det er også klart, at $\frac{b+d}{ac} < \infty$. Dermed er

$$0 \leq b_1(x) \leq b_2(x) \leq b_3(x) < \infty \tag{1}$$

for alle $x \in \mathcal{X}$. Altså er b_1, b_2 og b_3 ikke-negative funktioner på $\mathcal{X}$.

Ved eksempel 4.3 ser vi, da b_1 og b_3 er konstante funktioner, at b_1 og b_3 er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}$-målelige funktioner, og da de ikke antager værdien ∞ jf. (1), er $b_1, b_3 \in \mathcal{M}$ jf. definition 5.1.

Da $b_2 \in \mathcal{M}$ (jf. Q1.2), har vi jf. (1) og lemma 5.8, at $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{M}^+$. Med dette samt (1) benytter vi sætning 6.11 til at konkludere, at

$$\int b_1 \mathrm{d}\mu \leq \int b_2 \mathrm{d}\mu = \int \frac{f+g}{fg} \mathrm{d}\mu \leq \int b_3 \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Da b_1 og b_3 nu tilmed kun antager én funktionsværdi (da de er konstante), ligger de i $\mathcal{S}^+$. Da b_1 og b_3 har kanoniske former $b_1(x) = \frac{a+c}{bd} 1_{\mathcal{X}}(x)$ og $b_3(x) = \frac{b+d}{ac} 1_{\mathcal{X}}(x)$ (idet vi laver nogle meget trivielle kanoniske former, der klart opfylder betingelserne på side 105), har vi jf. definition 6.1 og sætning 6.10, at $\int b_1 \mathrm{d}\mu = I(b_1) = \frac{a+c}{bd}\mu(\mathcal{X})$ og $\int b_3 \mathrm{d}\mu = I(b_3) = \frac{b+d}{ac}\mu(\mathcal{X})$.

Med (2) har vi altså, at

$$\frac{a+c}{bd}\mu(\mathcal{X}) = \int b_1 \mathrm{d}\mu \leq \int \frac{f+g}{fg} \mathrm{d}\mu \leq \int b_3 \mathrm{d}\mu = \frac{b+d}{ac}\mu(\mathcal{X}), \tag{3}$$

hvilket var hvad ønskedes vist.

Vi skal desuden vise, at $\frac{f+g}{fg} = b_2$ er integrabel med hensyn til μ, hvis og kun hvis $\mu(\mathcal{X}) < \infty$.

Antag, at b_2 er integrabel med hensyn til μ. Da har vi jf. lemma 7.2, at $\int |b_2| \mathrm{d}\mu < \infty$. Da $b_2 \in \mathcal{M}^+$, er $b_2 = b_2^+ - b_2^- = b_2^+ - 0 = b_2^+ + b_2^- = |b_2|$, hvorpå $\int |b_2| \mathrm{d}\mu = \int b_2 \mathrm{d}\mu$ – dette gælder generelt for $\mathcal{M}^+$-funktioner jf. s. 143, og vil blive brugt meget i det følgende.

Da er $\int b_2 \mathrm{d}\mu < \infty$, og $\mu(\mathcal{X}) = \frac{bd}{a+c}\frac{a+c}{bd}\mu(\mathcal{X}) \leq \frac{bd}{a+c}\int b_2 \mathrm{d}\mu < \infty$, da $\frac{bd}{a+c} < \infty$.

Antag nu, at $\mu(\mathcal{X}) < \infty$. Da er $\frac{b+d}{ac}\mu(\mathcal{X}) < \infty$, da $\frac{b+d}{ac} < \infty$, og dermed fra (3), at $\int |b_2| \mathrm{d}\mu = \int b_2 \mathrm{d}\mu < \infty$. Da er b_2 integrabel med hensyn til μ jf. lemma 7.2.

Opgave 2

I det følgende i denne delopgave definerer vi $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ jf definition 5.7.

Q2.1

Vi skal argumentere for, at integralerne

$$I_n = \int_0^\infty \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right) \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

giver mening for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi definerer derfor $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved

$$f_n(x) = 1_{(0,\infty)}(x) \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right) \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi ser klart, at f_n er ikke-negativ for alle $x \in \mathbb{R}$ – for alle $n \in \mathbb{N}$ er

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \geq \sqrt{x^2} - x = |x| - x$$

hvor det sidste er lig 0 for $x \leq 0$ eller $-2x > 0$ for $x < 0$; indikatorfunktioner og funktionen $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ er ikke-negative for alle $x \in \mathbb{R}$.

Ved opgave 4.11(b) får vi, idet mængden $(0, \infty) \in \mathbb{I} \subset \mathbb{B}$ og vi definerer $\tilde{f_n} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ved $\tilde{f_n}(x) = ((x^2 + \frac{1}{n})^{1/2} - x)\frac{1}{1+x^2}$ (hvorpå vi ser, at $\tilde{f_n}$ er sammensat af kontinuerte funktioner og derfor selv er kontinuert), at f_n er $\mathbb{B}$-$\mathbb{B}$-målelig. Derpå er $f_n \in \mathcal{M}^+$ jf. definition 5.7. Da det altid giver mening at integrere en $\mathcal{M}^+$-funktion pr. definition 6.8, giver $I_n = \int f_n \mathrm{d}m$ mening for alle $n \in \mathbb{N}$.

Da vi fandt, at $f_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in \mathbb{R}$, har vi jf. sætning 6.11, da $0 \in \mathcal{M}^+$ (idet den er ikke-negativ og målelig jf. eksempel 4.3), at $0 = \int 0 \mathrm{d}m \leq \int f_n \mathrm{d}m = I_n$.

Vi har for alle $a, b \geq 0$, at $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Det ses let, da

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right| = \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $x \leq 0$ være givet. Da er $1_{(0,\infty)}(x) = 0$, så $|f_n(x)| = 0 \leq \frac{1}{1+x^2}$. Lad $x > 0$ være givet i stedet; da er $|x| = x$ og $1_{(0,\infty)}(x) = 1$. Vi har, at $|f_n| = f_n$, da $f_n \in \mathcal{M}^+$. Tillige har vi med foregående lille bevis, at

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left| 1_{(0,\infty)}(x) \left(\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}} - x \right) \frac{1}{1+x^2} \right| \\
&\leq \left| 1_{(0,\infty)}(x) \right| \left| \sqrt{x^2} + \sqrt{\tfrac{1}{n}} - x \right| \left| \frac{1}{1+x^2} \right| \\
&\leq 1 \left| |x| + \frac{1}{\sqrt{n}} - x \right| \frac{1}{1+x^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)} \quad \leq \quad \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Da altså $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ for alle $x \in \mathbb{R}$, har vi jf. sætning 6.11 – idet $|f_n| = f_n \in \mathcal{M}^+$ og $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ er ikke-negativ, kontinuert og dermed $\mathbb{B}$-$\mathbb{B}$-målelig jf. sætning 4.8 og derfor i $\mathcal{M}^+$ – at $I_n = \int f_n \mathrm{d}m = \int |f_n| \mathrm{d}m \leq \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}m < \infty$ jf. opgave 6.1. Dermed er $0 \leq I_n < \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi skal endelig vise, at I_n konvergerer for $n \to \infty$ og finde den dertilhørende grænseværdi.

Vi benytter dertil følgen (f_n) af alle tidligere definerede f_n for $n \in \mathbb{N}$. Vi fandt, at $f_n \in \mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $x \leq 0$ være givet. Da er $|f_n(x)| = 0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$.

Lad i stedet $x > 0$ være givet. Da fandt vi ovenfor, at $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$. Altså har vi for alle $x \in \mathbb{R}$, at $0 \leq f_n(x) = |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$.

Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet. Lader vi $n \to \infty$, ser vi, at følgen $(\frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)})$ konvergerer mod 0. Med klemmelemmaet får vi da, at følgen $(f_n(x))$ konvergerer mod 0 for $n \to \infty$; altså $f_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi så før for alle $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$, at $f_n(x) = |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$. Vi fandt tillige i opgave 6.1, at $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}m < \infty$. Da vi fandt før, at $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ er $\mathcal{M}^+$, har følgen (f_n) en integrabel majorant jf. definition 6.26, nemlig denne afbildning.

Vi havde, at $f_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi får nu med Majorantsætningen, sætning 6.27, hvis forudsætninger er opfyldt, at

$$I_n = \int f_n \mathrm{d}m \to \int 0 \mathrm{d}m = 0$$

for $n \to \infty$. Dermed konvergerer I_n med grænseværdi 0 for $n \to \infty$ – det giver altså mening at betragte $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Opgave 3

I det følgende i denne delopgave definerer vi $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ jf definition 5.7.

Vi definerer funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved rækken $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) a_n x^n$, hvorom det gælder (pr. antagelse), at $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og rækken er konvergent for $x \in [0, 1)$. (Da kan a_n ikke være lig ∞.) For $x = 1$ er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(= f(1))$ enten konvergent eller divergent mod ∞. For $x \notin [0, 1]$ er klart gældende, at $f(x) = 0$.

Q3.1

Vi skal argumentere for, at $f \in \mathcal{M}^+$. Definer nu $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $f_n(x) = 1_{[0,1]}(x) a_n x^n$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ med samme a_n som i rækken ovenfor.

Lad nu $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. For $x \notin [0, 1]$ er klart gældende, at $f_n(x) = 0$. Lad derfor $x \in [0, 1]$. Da er $x^n \geq 0$; da $a_n \geq 0$ og $1_{[0,1]}(x) = 1$, er $f_n(x) \geq 0$ for $x \in [0, 1]$, og dermed for $x \in \mathbb{R}$.

Med $[0, 1] \in \mathbb{B}$ (da denne mængde er lukket og dermed et komplement til en åben mængde i $\mathbb{O} \subset \mathbb{B}$, hvorpå komplementet til denne åbne mængde må ligge i $\mathbb{B}$ jf. definition 1.11), definerer vi $\tilde{f}_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ved $\tilde{f}_n(x) = a_n x^n$; denne funktion er klart kontinuert. Ved opgave 4.11(b) ser vi da, at f_n er $\mathbb{B}$-$\mathbb{B}$-målelig.

Vi har nu jf. definition 5.7, at $f_n \in \mathcal{M}^+$.

Vi definerer nu $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Jf. lemma 5.9 er $g_n \in \mathcal{M}^+$ induktivt, da $f_0 \in \mathcal{M}^+$, og under antagelse af, at $\sum_{k=0}^{n} f_k \in \mathcal{M}^+$, kan vi lægge f_{n+1} oveni, hvorpå denne nye sum stadig er i $\mathcal{M}^+$ jf. lemma 5.9.

Vi har nu en følge (g_n) af $\mathcal{M}^+$-funktioner, hvorom der klart gælder, at $g_0(x) \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots$ for alle $x \in \mathbb{R}$, da $f_k(x)$ var ikke-negativ for alle $k \in \mathbb{N}_0$ og $x \in \mathbb{R}$. $(g_n(x))$ er da voksende for alle $x \in \mathbb{R}$. Lader vi $x \in \mathbb{R}$ være givet, vil

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

for $n \to \infty$. Bemærk, at f sagtens kan antage værdien ∞, men at dette heller ikke strider imod hvad vi lod være lovligt (pr. definition af f).

Vi får nu jf. Monotonisætningen, sætning 6.12, at $f \in \mathcal{M}^+$.

Vi definerer nu

$$F(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$$

for $x \in [0,1]$. Vi skal vise, at $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$.

Tilfældet $x = 0$ er opfyldt, idet vi betragter funktionerne $x \mapsto 1_{[0,0]}(x)f(x)$ og $x \mapsto 0$, der er $\mathcal{M}^+$, da de er ikke-negative og målelige jf. eksempel 4.3 og opgave 4.11(b). Disse funktioner er m-næsten overalt jf. definition 6.21, da $m(\{x | 1_{[0,0]}(x)f(x) \neq 0\}) = m(\{0\}) = 0$ (eller $m(\emptyset) = 0$, hvis $f(0) = 0$). Jf. korollar 6.23 er

$$\int_0^0 f(y)\mathrm{d}y = \int 1_{[0,0]}(y)f(y)\mathrm{d}y = \int 0\mathrm{d}y = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} 0^n.$$

Lad i stedet $x \in (0,1]$ være givet. Vi har da. jf. sætning 6.20, da $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)$, hvor $f_n \in \mathcal{M}^+$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, at

$$F(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)\right) \mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x f_n(y)\mathrm{d}y.$$

Da $x \in (0,1]$, har vi jf. s. 150 og at $1_{(0,x]}(y)1_{[0,1]}(y) = 1_{(0,x]}(y)$, at

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x 1_{[0,1]}(y) a_n y^n \mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \int 1_{(0,x]}(y) a_n y^n \mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \int 1_{(0,x)}(y) a_n y^n \mathrm{d}y,$$

hvoraf den sidste lighed opnås med s. 150 – begge sider giver $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n y^n \mathrm{d}y$.

Lad nu $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Da er a_n fastholdt, og dermed en konstant.

Funktionerne $y \mapsto 1_{(\frac{x}{3m}, \frac{m}{m+1}x)}(y) a_n y^n$ ligger i $\mathcal{M}^+$ for alle $m \in \mathbb{N}$, da de er ikke-negative ($a_n \geq 0$) og målelige (jf. lemma 4.11 med $A = (\frac{x}{3m}, \frac{m}{m+1}x)$, og hvor $y \mapsto a_n y^n$ er kontinuert på dette interval).

Da $1_{(\frac{x}{3m}, \frac{m}{m+1}x)}(y) a_n y^n \nearrow 1_{(0,x)}(y) a_n y^n$ for alle $y \in \mathbb{R}$ for $m \to \infty$, har vi jf. Monotonisætningen, sætning 6.12, at

$$\int_{\frac{x}{3m}}^{\frac{m}{m+1}x} a_n y^n \mathrm{d}y = \int 1_{(\frac{x}{3m}, \frac{m}{m+1}x)} a_n y^n \mathrm{d}y \to \int 1_{(0,x)}(y) a_n y^n \mathrm{d}y = \int_0^x a_n y^n \mathrm{d}y$$

for $m \to \infty$.

Lad $m \in \mathbb{N}$ være givet. Vi har, at $y \mapsto a_n y^n$ er kontinuert på $(0, x)$ og ligger i $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, da den klart ikke antager værdien ∞ for noget $y \in \mathbb{R}$ og er målelig grundet kontinuiteten (lemma 4.8).

Vi definerer nu $B : (0, x) \to \mathbb{R}$, givet ved $B(y) = \frac{a_n}{n+1} y^{n+1}$. Lader vi $y \in (0, x)$ være givet, har vi, at $B'(y) = (n+1)\frac{a_n}{n+1} y^{n+1-1} = a_n y^n$. B er da differentiabel med differentialkvotient $a_n y^n$ (som håbet).

Vi har nu med korollar 7.19, da $\frac{x}{3m}, \frac{m}{m+1}x \in (0, x)$ for alle $m \in \mathbb{N}$, at

$$\int_{\frac{x}{3m}}^{\frac{m}{m+1}x} a_n y^n \mathrm{d}y = \frac{a_n}{n+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n+1} x^{n+1} - \frac{a_n}{n+1}\left(\frac{x}{3m}\right)^{n+1} \to \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

for $m \to \infty$. Dermed er $\int_0^x a_n y^n \mathrm{d}y = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Nu har vi altså for $x \in (0, 1]$, at

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n y^n \mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n,$$

hvilket indses ved at skifte index, hvorpå det ønskede er vist for alle $x \in [0, 1]$.

Q3.2

Vi husker, at $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ for $|x| < 1$, og specielt for $x \in [0, 1)$.

Vi skal vise, at $\log(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ for $x \in [0, 1)$.

Betragt rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) x^n$. Denne række er på formen $\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) a_n x^n$, hvor $a_n = 1 \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, og vi bemærker, at rækken er konvergent med sum $\frac{1}{1-x}$ for $x \in [0, 1)$. For $x = 1$ er rækken tydeligvis divergent mod ∞. Denne rækkes egenskaber er altså lig dem for den dannede række med sum $f(x)$ fra før Q3.1.

Vi definerer derfor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) x^n$, og $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som i Q3.1 ved $G(x) = \int_0^x g(y)\mathrm{d}y$.

Lad nu $x \in [0, 1)$ være givet. Da er $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Vi har dermed fra Q3.1, at

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \tag{4}$$

idet $a_n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nu genstår blot at vise, at $G(x) = \log(\frac{1}{1-x})$.

Da $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ for $x \in [0, 1)$ grundet ovennævnte viden om konvergens, har vi pr. definition ligeledes, idet $[0, x) \subset [0, 1)$, at

$$G(x) = \int_0^x g(y)\mathrm{d}y = \int 1_{[0,x)}(y) g(y)\mathrm{d}y = \int 1_{[0,x)}(y) \frac{1}{1-y}\mathrm{d}y \tag{5}$$

jf. s. 150.

Vi definerer $\tilde{h} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ved $\tilde{h}(x) = \frac{1}{1-x}$ for alle $x \in (-1, 1)$. Benytter vi lemma 4.11 med $A = (-1, 1)$ med $\tilde{h}$, som er kontinuert, er funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $h(x) = 1_{(-1,1)}(x)\frac{1}{1-x}$ dermed $\mathbb{B}$-målelig. Da den ligeledes kun antager endelige værdier, slutter vi, at $h \in \mathcal{M}$.

Vi definerer nu $H : (-1,1) \to \mathbb{R}$, givet ved $H(y) = \log(\frac{1}{1-y})$. H er da differentiabel, og lader vi $y \in (-1,1)$ være givet, har vi, at

$$H'(y) = (-\log(1-y))' = -(1-y)'\log'(1-y) = -(-1)\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-y} = h(y).$$

Vi har endelig ved korollar 7.19, da $h = \tilde{h}$ på $(-1,1)$, hvorpå h er kontinuert på $(-1,1)$, og da $0, x \in (-1,1)$, at

$$\int_0^x 1_{(-1,1)}(y)\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{1}{1-y}\mathrm{d}y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \log(1) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

og dermed, at $\int 1_{[0,x)}\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y = \log(\frac{1}{1-x})$, jf. s. 150.

Med (5) har vi da, at $G(x) = \log(\frac{1}{1-x})$, og med (4), at $\log(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ for $x \in [0,1)$, hvilket var hvad ønskedes vist.

Q3.3

Vi skal vise, at der gælder om F fra Q3.1, at $\lim_{m\to\infty} F(1-\frac{1}{m}) = F(1)$.

Vi definerer funktionerne $G_1, G_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så $G_m(x) = 1_{[0,1-\frac{1}{m}]}(x)f(x)$ for $m \in \mathbb{N}$. Da $f(x) \geq 0$ for alle x, er G_m ikke-negativ for alle $m \in \mathbb{N}$. Vi har fra Abels sætning, at f er kontinuert på $[0,1)$, da f er (antaget) konvergent på dét interval; dermed er f kontinuert på $[0,1-\frac{1}{m}]$ for alle $m \in \mathbb{N}$.

Lad $m \in \mathbb{N}$ være givet. Ved opgave 4.11(b) får vi – idet vi lader $A = [0,1-\frac{1}{m}] \in \mathbb{B}$ (da denne mængde er lukket og dermed et komplement til en åben mængde i $\mathbb{O} \subset \mathbb{B}$, hvorpå komplementet til denne åbne mængde må ligge i $\mathbb{B}$, jf. definition 1.11) og vi definerer $\tilde{G}_m : [0,1-\frac{1}{m}] \to \mathbb{R}$ ved $\tilde{G}_m(x) = f(x)$, hvorpå vi ser, at $\tilde{G}_m$ er kontinuert – at G_m er $\mathbb{B}$-$\mathbb{B}$-målelig. Ved definition 5.7 er $G_m \in \mathcal{M}^+$ for $m \in \mathbb{N}$.

Tillige har vi for alle $x \in \mathbb{R}$, at $G_1(x) \leq G_2(x) \leq G_3(x) \leq \ldots$, og definerer vi $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\gamma(x) = 1_{[0,1)}(x)f(x)$, har vi klart, at $G_m(x) \nearrow \gamma(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ for $m \to \infty$. Ved Monotonisætningen, sætning 6.12, har vi derfor, at $\gamma \in \mathcal{M}^+$, og endnu bedre har vi følgende for $m \in \mathbb{N}$ jf. s. 150 og definition 6.9:

$$\begin{aligned} F\left(1-\frac{1}{m}\right) &= \int_0^{1-\frac{1}{m}} f(y)\mathrm{d}y = \int 1_{[0,1-\frac{1}{m}]}(y)f(y)\mathrm{d}y = \int G_m(y)\mathrm{d}y \\ &\to \int \gamma(y)\mathrm{d}y = \int 1_{[0,1)}(y)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \quad = \quad F(1), \end{aligned}$$

for $m \to \infty$. Dermed er $\lim_{m\to\infty} F(1-\frac{1}{m}) = F(1)$.

Vi skal vise, at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$. Idet vi benytter dette for g og G fra Q3.2, må vi ligeledes have, at $\lim_{m\to\infty} G(1-\frac{1}{m}) = G(1)$, da g havde samme egenskaber for rækken med sum $f(x)$. Vi har da først, at $G(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Da $1-\frac{1}{m} \in [0,1)$ for alle $m \in \mathbb{N}$, har vi at

$$G\left(1-\frac{1}{m}\right) = \log\left(\frac{1}{1-(1-\frac{1}{m})}\right) = \log\left(\frac{1}{\frac{1}{m}}\right) = \log(m) \to \infty$$

for $m \to \infty$. Men da vi havde, at $\lim_{m\to\infty} G(1-\frac{1}{m}) = G(1)$, finder vi her, at $G(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$, hvilket ønskedes vist.

Opgave 4

I det følgende i denne delopgave definerer vi $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ jf definition 5.7.

Q4.1

Det skal vises, at

$$J_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(y \sin(x) - nx) \mathrm{d}x$$

er en veldefineret, kontinuert funktion $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}_0$.

Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Definitionen af J_n giver mening, hvis integralet i funktionen giver mening (konstanten $\frac{1}{\pi}$ gør ikke nogen forskel).

Vi definerer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved $f(x, y) = 1_{(0,\pi)}(x) \cos(y \sin(x) - nx)$. Integralet giver da mening, hvis f er integrabel med hensyn til x for fastholdt $y \in \mathbb{R}$. Vi lader i det følgende y være fast.

Det er oplagt, at $x \mapsto \cos(y \sin(x) - nx)$ er kontinuert for alle $x \in (0, \pi)$, da denne er sammensat af kontinuerte funktioner.

Vi definerer $g : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ved $g(x) = \cos(y \sin(x) - nx)$ for $x \in \mathbb{R}$; g er kontinuert. Da er f $\mathbb{B}$-målelig for fast y jf. lemma 4.11 (da $(0, \pi)$ er åben), da f er lig udvidelsen i lemmaet. Vi har dermed, at $|f|$ for fast y er $\mathbb{B}$-målelig jf. lemma 5.2; da denne er positiv, er $|f| \in \mathcal{M}^+$.

Idet $|\cos(b)| \leq 1$ for alle $b \in \mathbb{R}$, har vi, at

$$|f(x, y)| = |1_{(0,\pi)}(x)||\cos(y \sin(x) - nx)| \leq 1_{(0,\pi)}(x)$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Da $1_{(0,\pi)} \in \mathcal{S}^+ \subset \mathcal{M}^+$, har vi jf. sætning 6.10 og eksempel 6.2, at $\int 1_{(0,\pi)} \mathrm{d}m = I(1_{(0,\pi)}) = \pi$. Med sætning 6.11 får vi nu, stadig med fast y, at $\int |f(x, y)| \mathrm{d}x \leq \int 1_{(0,\pi)}(x) \mathrm{d}x = \pi < \infty$. Vi har med lemma 7.2, at f da er integrabel med hensyn til x for fastholdt y, hvorpå integralet og dermed definitionen på funktionen J_n giver mening.

Lad atter $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Vi fandt før, at $|f(x, y)| \leq 1_{(0,\pi)}(x)$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, hvorpå $1_{(0,\pi)} \in \mathcal{M}^+$ er en integrabel majorant jf. definition 6.26, da $\int 1_{(0,\pi)} \mathrm{d}m = \pi < \infty$. Vi fandt ligeledes før, at alle snitfunktioner $x \mapsto f(x, y)$ (altså f med fastholdt y) var $\mathbb{B}$-målelige. Sætter vi $U = \mathbb{R}$, er U åben i $\mathbb{R}$, hvorpå f opfylder alle betingelser før definitionen af ϕ i sætning 8.9.

Lader vi x være fast, ser vi, at snitfunktionen

$$y \mapsto 1_{(0,\pi)}(x) \cos(y \sin(x) - nx) = f(x, y)$$

klart er kontinuert for alle $y \in \mathbb{R}$, da $1_{(0,\pi)}(x)$ enten er lig 0 eller 1: For $1_{(0,\pi)}(x) = 0$ er $y \mapsto f(x, y) = 0$ klart kontinuert for $y \in \mathbb{R}$, og for $1_{(0,\pi)}(x) = 1$ er snitfunktionen sammensat af kontinuerte funktioner og dermed kontinuert selv for alle $y \in \mathbb{R}$. Med sætning 8.9 har vi derpå, at $\int f(x, y) \mathrm{d}x$ er kontinuert i alle $y \in \mathbb{R}$, og dermed "bare"kontinuert.

Da produktet af en konstant (og dermed kontinuert) funktion $x \mapsto \frac{1}{\pi}$ og en kontinuert funktion $x \mapsto \int f(x, y) \mathrm{d}x$ atter giver en kontinuert funktion, er

$$J_n(y) = \frac{1}{\pi} \int 1_{(0,\pi)}(x) \cos(y \sin(x) - nx) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(y \sin(x) - nx) \mathrm{d}x$$

selv kontinuert (vi bruger s. 150 i det ovenstående).

Q4.2

Vi skal nu vise, at J_n er differentiabel. Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Vi betragter nu igen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x,y) = 1_{(0,\pi)}(x)\cos(y\sin(x) - nx)$. Vi fandt i Q4.1, at f opfyldte, at alle snitfunktioner $x \mapsto f(x,y)$ (altså med fast y) var $\mathbb{B}$-målelige.

Vi fandt ligeledes for disse snitfunktioner i Q4.1, at $\int |f(x,y)|\mathrm{d}x \leq \int 1_{(0,\pi)}(x)\mathrm{d}x = \pi < \infty$, hvorpå disse var integrable med hensyn til x (og dermed med hensyn til m, målet på $\mathbb{R}$, som x kører over).

Idet vi lader $I = \mathbb{R}$, som derpå er åben i $\mathbb{R}$, opfylder f dermed alle betingelser i sætning 8.14 indtil definitionen af ϕ.

Lad nu x være fast. Er $1_{(0,\pi)}(x) = 0$ for dette x, er $y \mapsto f(x,y) = 0$ klart differentiabel med differentialkvotient $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \leq 1_{(0,\pi)}(x)$ for alle $y \in \mathbb{R}$ og $x \notin (0,\pi)$.

Lad derfor gælde for x, at $x \in (0,\pi)$, altså at $1_{(0,\pi)}(x) = 1$. Vi ser derpå, at snitfunktionen $y \mapsto f(x,y) = 1_{(0,\pi)}(x)\cos(y\sin(x) - nx) = \cos(y\sin(x) - nx)$ klart er differentiabel på hele $\mathbb{R}$, med differentialkvotient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =\right)\cos'(y\sin(x) - nx)(y\sin(x) - nx)' = -\sin(y\sin(x) - nx)\sin(x)$$

for alle $y \in \mathbb{R}$. Da $|\sin(b)| \leq 1$ for alle $b \in \mathbb{R}$, har vi, at

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |-\sin(y\sin(x) - nx)|\,|\sin(x)| \leq 1 = 1_{(0,\pi)}(x)$$

for alle $y \in \mathbb{R}$ og $x \in (0,\pi)$. Vi har altså, at $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq 1_{(0,\pi)}(x)$ for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da vi fandt, at $1_{(0,\pi)} \in \mathcal{M}^+$ var integrabel i Q4.1, har vi med sætning 8.14, at $\int f(x,y)\mathrm{d}x$ er differentiabel i alle $y \in I = \mathbb{R}$.

Det ses klart, at $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1_{(0,\pi)}(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ – for $x \notin (0,\pi)$ er højresiden lig 0, og funktionen, der differentieres på venstresiden, er nulfunktionen. For $x \in (0,\pi)$ gælder ovenstående klart.

Da multiplikation af konstanter på differentiable funktioner ikke ændrer på differentiabilitet, er J_n dermed differentiabel for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Med sætning 8.14 får vi for $y \in \mathbb{R}$, at

$$J_n'(y) = \frac{1}{\pi}\int 1_{(0,\pi)}(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin(y\sin(x) - nx)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Vi vil vise, at $J_1'(0) = \frac{1}{2}$ og $J_n'(0) = 0$ for $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq 1$. Vi betragter $J_1'(0)$:

$$J_1'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin(-x)\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x,$$

pr. almindelige trigonometriske regneregler. Da $\sin^2$ er kontinuert på $\mathbb{R}$, begrænset (af konstanten 1) og $\mathbb{B}$-målelig (jf. lemma 4.8, da den er kontinuert), hvorpå denne ligger i $\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{B})$, kan vi betragte funktionen $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $M(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x$. Denne funktion er differentiabel, og lader vi

$x \in \mathbb{R}$ være givet, ser vi, at

$$\begin{aligned} M'(x) &= \left(-\tfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \tfrac{1}{2}x\right)' \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - (\sin'(x)\cos(x) + \sin(x)\cos'(x))\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sin^2(x) + \sin^2(x)\right) \quad = \quad \sin^2(x). \end{aligned}$$

Vi får nu med korollar 7.19, da $\sin(n\pi) = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, at

$$\begin{aligned} J_1'(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\tfrac{1}{2}\sin(\pi)\cos(\pi) + \tfrac{1}{2}\pi\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\sin(0)\cos(0) + \tfrac{1}{2}\cdot 0\right)\right] = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lad nu $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq 1$ være givet. Vi vil bestemme $J_n'(0)$, hvoraf vi indtil videre ved, at

$$J_n'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin(-nx)\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(x)\mathrm{d}x,$$

hvor vi igen benytter sædvanlige trigonometriske regneregler. Funktionen $x \mapsto \sin(nx)\sin(x)$ er klart kontinuert på $\mathbb{R}$, begrænset (af konstanten 1) og $\mathbb{B}$-målelig, da den er kontinuert (jf. lemma 4.8), hvorpå denne ligger i $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Vi definerer nu funktionen $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((n-1)x)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right).$$

(Hurtigt ses, at $n = 1$ ikke duer på denne, hvorfor dette tilfælde var et særtilfælde.) S er differentiabel, og lader vi $x \in \mathbb{R}$ være givet, ser vi, at

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\sin((n-1)x)}{n-1} - \tfrac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right)\right)' \\ &= \tfrac{1}{2}\left((n-1)\tfrac{\cos((n-1)x)}{n-1} - (n+1)\tfrac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(nx - x) - \cos(nx + x)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x) - \cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(nx)\sin(x) + \sin(nx)\sin(x)\right) \quad = \quad \sin(nx)\sin(x), \end{aligned}$$

hvor vi undervejs brugte additionsformlerne for cos. Vi bruger nu korollar 7.19, idet $\sin(n\pi) = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, og får, at

$$\begin{aligned} J_n'(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left(\tfrac{\sin((n-1)\pi)}{n-1} - \tfrac{\sin((n+1)\pi)}{n+1}\right)\right) - \left(\left(\tfrac{\sin((n-1)0)}{n-1} - \tfrac{\sin((n+1)0)}{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot 0 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Altså er $J_1'(0) = \frac{1}{2}$ og $J_n'(0) = 0$ for $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq 1$, hvilket var præcis, hvad vi ønskede at finde.

Opgave 5

I det følgende i denne delopgave definerer vi $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ jf. definition 5.7.

Lad $f \in \mathcal{M}^+$. Vi definerer nu for $t \in [0, \infty)$ følgende funktion $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ ved

$$\varphi(t) = \int_0^\infty f(x)e^{-tx}\mathrm{d}x,$$

og φ fortælles i opgaveformuleringen at være veldefineret, idet snitfunktionerne $x \mapsto 1_{(0,\infty)}(x)f(x)e^{-tx}$ er $\mathcal{M}^+$-funktioner (dette kan bruges uden forklaring i denne delopgave).

Q5.1

Under antagelse af, at f er integrabel med hensyn til x, skal der vises, at φ er differentiabel på $(0, \infty)$.

Lad $I = (0, \infty)$. Vi definerer funktionen $g : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ved $g(x, t) = 1_{(0,\infty)}(x)f(x)e^{-tx}$. Vi har, at $g \in \mathcal{M}^+$, så $|g| = g \in \mathcal{M}^+$. Vi har, at snitfunktionen $x \mapsto 1_{(0,\infty)}(x)f(x)e^{-tx}$ er $\mathbb{B}$-målelig pr. definition 5.7, da vi har, at de er $\mathcal{M}^+$.

For alle $x \in \mathbb{R}$ og $t \in (0, \infty)$ har vi, at

$$|g(x, t)| = |1_{(0,\infty)}(x)f(x)e^{-tx}| \leq |f(x)|,$$

da $|1_{(0,\infty)}(x)e^{-tx}|$ er lig 0 for $x \notin (0, \infty)$, hvorpå $|g(x, t)| = 0 \leq |f(x)|$. For $x \in (0, \infty)$, er $tx \in (0, \infty)$, hvorpå $1_{(0,\infty)}(x)e^{-tx} \leq 1e^0 = 1$, da exp er voksende.

Da $|g| \in \mathcal{M}^+$ og $|f| = f \in \mathcal{M}^+$, har vi jf. sætning 6.11, at $\int |g(x, t)|\mathrm{d}x \leq \int |f(x)| < \infty$, da f var antaget at være integrabel, jf. lemma 7.2. Jf. samme er g dermed integrabel, og dette med hensyn til x. g opfylder dermed alle betingelser i sætning 8.14, indtil definitionen af ϕ (igen).

Lad nu x være fast. Da er $g(x, t)$ enten lig 0 eller $f(x)e^{-tx}$ grundet indikatorfunktionen. Begge er klart differentiable for alle $t \in (0, \infty)$.

Lader vi $x \in (0, \infty)$ og $t \in (0, \infty)$ være givet, er $g(x, t) = f(x)e^{-tx}$.

Lad $a, b \in (0, \infty)$ være givet. Vi betragter nu $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)|$ for givet $x \in (0, \infty)$ og $t \in [a, b] \subset (0, \infty)$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\right| = |f(x)(-x)e^{-tx}| = f(x)xe^{-tx}.$$

Vi vurderer nu faktoren xe^{-tx}. Da den afledte til $t \mapsto xe^{-tx}$ er $-x^2e^{-tx}$, ser vi, at denne funktion er aftagende. Da vi betragter t på intervallet $[a, b]$, har vi altså, at $xe^{-tx} \leq xe^{-ax}$. Funktionen $x \mapsto xe^{-ax}$ har differentialkvotient $(1 - ax)e^{-ax}$, hvorpå det let ses, at funktionen har globalt maksimum i $x = a^{-1}$ med værdi $(ae)^{-1}$. Altså er $xe^{-tx} \leq (ae)^{-1}$ for $x \in (0, \infty)$ og $t \in [a, b] \subset (0, \infty)$, og dermed er $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)| \leq (ae)^{-1}f(x)$ for samme.

Da $x \mapsto (ae)^{-1}$ er konstant og dermed $\mathbb{B}$-målelig (jf. eksempel 4.3), samt positiv, ligger denne i $\mathcal{M}^+$. Vi har jf. lemma 5.9, at produktet $x \mapsto (ae)^{-1}f(x)$ ligger i $\mathcal{M}^+$, da $f \in \mathcal{M}^+$ pr. antagelse. Vi har nu jf. sætning 6.19, da $(ae)^{-1} \in [0, \infty)$, at $\int (ae)^{-1}|f|\mathrm{d}m = (ae)^{-1} \int |f|\mathrm{d}m < \infty$ jf. lemma 7.2, da f var integrabel. Dermed er $(ae)^{-1}f$ integrabel pr. lemma 7.2.

Da vi kan gøre dette uanset hvilke a, b vi vælger, gælder det for alle $x \in (0, \infty)$ og $t \in (0, \infty)$ (bare vi vælger a og b passende), og vi har dermed fundet en integrabel majorant ($(ae)^{-1}f$) pr. sætning 8.14.

Lader vi $x \notin (0, \infty)$ og $t \in (0, \infty)$ være givet, er $g(x, t) = 0$, hvorpå $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)| = 0 \leq f(x)$. Altså er $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)| \leq f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $t \in (0, \infty)$, og denne majorant var i $\mathcal{M}^+$ og antaget integrabel.

Vi har dermed fundet integrable majoranter for $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)|$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $t \in (0, \infty)$.

Det ses klart, at $\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = 1_{(0,\infty)}(x)\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ – for $x \notin (0, \infty)$ er højresiden lig 0, og funktionen, der differentieres på venstresiden, er nulfunktionen. For $x \in (0, \infty)$ gælder ovenstående klart.

Da alle betingelser i sætning 8.14 dermed er opfyldt, er φ differentiabel på $(0, \infty)$. Differentialkvotienten er for alle $t \in (0, \infty)$ pr. samme sætning givet ved

$$\varphi'(t) = \int 1_{(0,\infty)}(x)\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\mathrm{d}x = \int_0^\infty -xf(x)e^{-tx}\mathrm{d}x.$$

Vi skal nu vise, at $\lim_{n\to\infty} \varphi'(n^{-1}) = -\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x$.

Vi har fundet, at $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)| = 1_{(0,\infty)}(x)xf(x)e^{-tx}$. Denne funktion er klart i $\mathcal{M}^+$ jf. definition 5.3 og lemma 5.9 (med hensyn til $\cdot$), da funktionen $x \mapsto 1_{(0,\infty)}(x)x$ er $\mathbb{B}$-målelig jf. lemma 4.11 – idet $x \mapsto x$ er kontinuert og vi betragter den åbne mængde $(0, \infty)$ – og positiv.

Vi fandt lettere omstændeligt ovenfor, at $|\frac{\partial g}{\partial t}|$ havde integrable majoranter for alle $x \in \mathbb{R}$ og $t \in (0, \infty)$. Da både $|\frac{\partial g}{\partial t}|$ og majoranterne ligger i $\mathcal{M}^+$, får vi med sætning 6.11 og lemma 7.2, at $|\frac{\partial g}{\partial t}|$ ligeså er integrabel med hensyn til x.

Med lemma 7.3(1) får vi, da $|\frac{\partial g}{\partial t}|$ er integrabel, at

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \int -1_{(0,\infty)}(x)xf(x)e^{-tx}\mathrm{d}x = \int -\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\right|\mathrm{d}x \\
&= -\int \left|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\right|\mathrm{d}x = -\int 1_{(0,\infty)}(x)xf(x)e^{-tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Lad $t \in (0, \infty)$ være fast. Vi definerer nu for alle $n \in \mathbb{N}$ funktionen $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$\phi_n(x) = 1_{(0,\infty)}(x)xf(x)e^{-n^{-1}x}.$$

For alle $n \in \mathbb{N}$ er ϕ_n klart positiv og $\mathbb{B}$-målelig jf. lemma 4.11, da funktionen $x \mapsto xf(x)e^{-n^{-1}x}$ er kontinuert og vi betragter den åbne mængde $A = (0, \infty)$, og dermed er $\phi_n \in \mathcal{M}^+$. Endvidere ser vi for alle $x \in \mathbb{R}$, at $\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \phi_3(x) \leq \ldots$, da exp er voksende og følgen (n^{-1}) er aftagende.

Vi har nu klart for alle $x \in \mathbb{R}$, at talfølgen $(\phi_n(x))$ konvergerer opad punktvis, og at $\phi_n(x) \nearrow 1_{(0,\infty)}(x)xf(x)e^{-0x} = 1_{(0,\infty)}(x)xf(x)$ for $n \to \infty$. Da giver Monotonisætningen, sætning 6.12, at

$$\int \phi_n(x)\mathrm{d}x \to \int 1_{(0,\infty)}(x)xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x$$

jf. s. 150. Da vi nu ser, at $\varphi'(n^{-1}) = -\int \phi_n(x)\mathrm{d}x$, har vi altså, at

$$\varphi'(n^{-1}) = -\int \phi_n(x)\mathrm{d}x \to -\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x$$

for $n \to \infty$, ved de sædvanlige regneregler for grænseværdier. Dette var netop, hvad vi skulle vise.